Acciones de grupo sobre superficies de Riemannn

por

Leslie Alejandra Jiménez Palma

Junio, 2009

Profesora del curso: Dra. Anita Rojas

Índice general

Introducción

Durante el desarrollo de este curso, nosotros nos concentramos en la acción de grupos finitos sobre superficies de Riemann X. De hecho, es posible dar una estructura compleja a X/G para una cierta clases de acciones de grupos infinitos. En efecto, si X es una superficie de Riemann y G actúa discontinuamente (ver definición 1.1.1) sobre X entonces los puntos de X con estabilizadores no triviales forman un conjunto discreto y todos los estabilizadores son grupos finitos cíclicos. Esto permite poner un estructura compleja sobre X/G de manera análoga a lo desarrollado en clases para grupos de orden finito.

El objetivo de este trabajo, el cual fue obtenido de [1], es clasificar:
(a) los grupos que actúan discontinuamente sobre la esfera de Riemann, y
(b) los grupos que actúan discontinuamente sobre el plano complejo.

Cabe señalar que aunque en un principio esta clasificación parece ser un estudio muy particular de cierto tipo de superficies de Riemann, el siguiente (importante) resultado dentro de esta área de estudio nos muestra lo contrario.

Teorema 0.0.1. [Uniformización]. Toda superficie de Riemann X es conformemente equivalente a D/G con $D = \hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}$ *o* U y G es un grupo de transformaciones de *Möbius* que preservan D, el cual actúa discontinuamente (y libremente) sobre X.

En el primer capítulo se introducirán algunos hechos y definiciones generales. En el segundo y tercer capítulo se analizarán (a) y (b), respectivamente.

Capítulo 1

Definiciones generales

1.1. Grupos discontinuos y cubrimientos ramuficados

En este trabajo, el grupo G será un subgrupo de $PL(2, \mathbb{C})$. Entonces G actuará como un grupo de automorfismos biholomorfos sobre el plano extendido $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Definición 1.1.1. Sea $z_0 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Diremos que G actúa discontinuamente (propiamente) en z_0 si

$$\text{el subgrupo isotrópico de } G \text{ en } z_0,\\ G_{z_0} = \{g \in G : g(z_0) = z_0\}, \text{ es finito,}$$

y

$$\text{existe una vecindad } U \text{ de } z_0 \text{ tal que}\\ g(U) = U \text{ para todo } g \in G_{z_0},$$

y

$$g(U) \cap U = \emptyset \text{ para todo } g \in G \setminus G_{z_0}.$$

Denotaremos por $\Omega(G) = \Omega$ a la *región de discontinuidad* de G.

Proposición 1.1.2. Ω es un subconjunto abierto G-invariante de $\hat{\mathbb{C}}$.

Demostración. Probaremos primero que $G\Omega = \Omega$. Notamos que siempre ocurre $\Omega \subseteq G\Omega$. Para probar la contención inversa, tomemos $z_0 \in \Omega$. Entonces G_{z_0} es finito, y existe una vecindad U de z_0 tal que $g(U) = U$ para todo $g \in G_{z_0}$ y $g(U) \cap U = \emptyset$ para todo $g \in G \setminus G_{z_0}$.
Dado $g \in G$, probaremos que $g(z_0) \in \Omega$.

- Si $g \in G_{z_0}$ entonces $g(z_0) = z_0 \in \Omega$.
- Si $g \in G \setminus G_{z_0}$ entonces
  (a) el subgrupo $G_{g(z_0)} = \{g' \in G : (g' \circ g)(z_0) = g(z_0)\}$ es finito, ya que de lo contrario habrían infinitos elementos en G de la forma $g^{-1}g'g$ que fijan z_0. LO cual contradice que G_{z_0} es finito.
  (b) Entonces $g'(g(U)) = g(U)$ pata todo $g' \in G_{g(z_0)}$. Afirmamos que

  $$g'(g(U))\ capg(U) = \emptyset,$$

  para todo $g' \in G \setminus G_{g(z_0)}$.

  Si existe $h \in G_{g(z_0)}$ tal que $h(g(U)) \cap g(U) \neq \emptyset$ entonces

  $$(g^{-1}hg)(U) \cap U \neq \emptyset.$$

  Notamos que $g^{-1}hg \notin G_{g(z_0)}$, ya que si estuviera $h \in G_{g(z_0)}$. Del mismo modo vemos que $g^{-1}hg \notin G_{z_0}$. De esta manera, concluimos que $z_0 \notin \Omega$, lo cual contradice nuestra suposición inicial.

Para demostrar que Ω es abierto, tomemos $z_0 \in \Omega$. Sabemos entonces que hay una vecindad U de z_0 que cumple las propiedades de acción discontinua. La idea para probar que esta vecindad está totalmente contenida en Ω es la siguiente. Para esto, tomemos $x_0 \in U, x_0 \neq z_0$. Nuestro argumento es por continuidad (los elementos de G son transformaciones holomorfas, por lo tanto continuas). De este modo tenemos que como $x_0 \in U$ y $z_0 \in U$ y el radio de U es tan pequeño como se quiera, entonces $g(x_0) \in g(U)$ y $g(z_0) \in g(U)$ para todo $g \in G$. De este modo, el punto $x_0 \in \Omega$. □

Definición 1.1.3. Diremos que G es un grupo *Kleiniano* si $\Omega \neq \emptyset$.

A continuación veremos algunos ejemplos de grupos Kleinianos.

Ejemplo 1.1.4. Definamos $\alpha : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ tal que $z \mapsto -z$. Si consideramos $G = \langle \alpha \rangle$ entonces $G = \{id, \alpha\}$ pues $\alpha^2 = id$. Note que $G \subset PL(2, \mathbb{C})$ y G_{z_0} es finito para todo $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$. Probaremos que G es un grupo Kleiniano.

Para esto, mostraremos que $1 + i \in \Omega$. Si $z_0 = 1 + i$ entonces $G_{z_0} = id$. Además, si $U = B(z_0, 1/2)$ entonces $\alpha(U) \cap U = \emptyset$. Por lo tanto, el grupo G actúa discontinuamente en $1 + i$. De hecho, este mismo argumento se puede aplicar para todo $z_0 \neq 0$ en $\mathbb{C}$ considerando U como la bola centrada en z_0 de radio $|z_0|/2$. En el caso en que $z_0 = 0$ (respectivamente $z_0 = \infty$) se tiene trivialmente que $0 \in \Omega$ (resp. $\infty \in \Omega$), ya que $G_0 = G$ (resp. $G_\infty = G$). De este modo, la región de discontinuidad de G es todo el plano extendido.

Ejemplo 1.1.5. Sea $G = \{z \mapsto z + b : b \in \mathbb{Z}\}$ el subgrupo de traslaciones en $PL(2, \mathbb{C})$. Como $G_\infty = G$ y G es infinito, tenemos que $\infty \notin \Omega$. Probaremos que G actúa discontinuamente en todo $\mathbb{C}$.

Sin pérdida de generalidad probaremos que $0 \in \Omega$. Primero que todo, notamos que G_0 es trivial. Luego, si $g \in G_0$ entonces $g(U) = U$ para toda vecindad U de 0. Si $g \in G \setminus \{id\}$ entonces dado $b \in \mathbb{C}$ podemos tomar $U = B(0, 1/4)$. Ésta cumple que $g(U) \cap U = \emptyset$. Por lo tanto, hemos probado que $\Omega = \mathbb{C}$ y así, G es un grupo Kleiniano.

Definición 1.1.6. Sea M una superficie de Riemann. Diremos que M es de tipo finito si existe una superficie de Riemann compacta $\check{M}$ tal que $\check{M} \setminus M$ es finito.

Como ejemplo de lo anterior, vemos que $\mathbb{C}$ es una superficie de Riemann de tipo finito. Ya que $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{C} = \{\infty\}$.

El género de M está bien definido como el género de $\check{M}$.

Definición 1.1.7. Un pinchado sobre una superficie de Riemann M es un dominio $D_0 \subset M$ con D_0 conformemente equivalente a $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$, y tal que cada sucesión $\{z_n\}$ con $z_n \to 0$ es discreta en M. Identificamos $z = 0$ con el punto pinchado de D_0.

Sea D un subconjunto G-invariante, conexo y abierto de Ω. Aquí G es un grupo Kleiniano. Sean $\{x_1, x_2, ...\}$ el conjunto de puntos pinchados de D/G o puntos $x \in D/G$ tales que la proyección canónica $\pi : D \longrightarrow D/G$ ramificada en $\pi^{-1}(x)$. Definamos

$$V_j = \begin{cases} \mu_{\pi^{-1}(x_j)} & \text{si } x_j \in D/G, \\ \infty & \text{si } x_j \text{ es pinchado.} \end{cases}$$

donde $\mu_{\pi^{-1}(x_j)}$ es el índice de ramificación de $\pi^{-1}(x_j)$.

Observamos que $\{x_j\}$ es a lo más numerable, ya que el conjunto de puntos pinchados y el conjunto de puntos de ramificación son (ambos) discretos.

Definición 1.1.8. Diremos que G es de tipo finito sobre D si D/G es una superficie de Riemann de tipo finito, y si π ramifica sólo en una cantidad finita de puntos. En este caso, denotaremos por p al género de D/G.

Note que si asumimos que G es de tipo finito sobre D, podemos ubicar la secuencia $\{x_j\}$ de modo que

$$2 \leqslant V_1 \leqslant V_2 \leqslant ... \leqslant V_n \leqslant \infty,$$

donde n es la cardinalidad de $\{x_1, x_2, ...\}$, la cual es finita. Llamamos a

$$(p, V_1, V_2, ..., V_n)$$

la *firma* de G.

Definición 1.1.9. Sean G grupo Kleiniano y $D \subset \Omega$ un conjunto abierto G-invariante. Un dominio fundamental para G respecto a D es un conjunto abierto ω de D tal que

(i) ningún par de puntos de ω son equivalente bajo G,

(ii) cada punto de D es G-equivalente a al menos un punto de la clausura de ω; $Cl\omega$,

(iii) el relativo borde de ω en D; $\delta\omega$, consiste de pedacitos de arcos analíticos, y

(iv) para cada $arc\,C \subset \delta\omega$ existe $arc\,C' \subset \delta\omega$ y un elemento $g \in G$ tal que $g\,C = C'$.

Cabe mencionar que por un dominio fundamental para G entenderemos un dominio fundamental para G con respecto a Ω. La proposición que viene propone que todo grupo cuya región de discontinuidad es no vacía admite una región fundamental. La demostración de este resultado no será expuesta en este trabajo (ver [3] p. 207 para una demostración). A modo de reemplazo se exhibirán los dominios fundamentales de algunos de los grupos que actúan discontinuamente sobre $\mathbb{C}$.

Proposición 1.1.10. Todo grupo Kleiniano tiene un dominio fundamental.

Definición 1.1.11. Sea A una transformación de Möbius cuyo dominio es $\hat{\mathbb{C}}$, $A \neq id$. Entonces A tiene uno o dos puntos fijos. Si A tiene un punto fijo entonces A es llamada parabólica.

Observamos que si A es parabólica con punto fijo $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ y elegimos C transformación de Möbius tal que $C(z_0) = \infty$. Entonces $D = C \circ A \circ C^{-1}(\infty) = \infty$ y así D tiene la forma $D(z) = az + b$ con $a \neq 0$. Como A es parabólico también lo es D. Así podemos tomar $a = 1$. Concluimos que A es parabólico si y sólo si A es conjugada a la traslación $z \mapsto z + b$ (y entonces también conjugada a $z \mapsto z + 1$). De manera similar, se puede establecer que una tansformación A con dos puntos fijos es conjugada a $z \mapsto \lambda z, \lambda \neq 0, 1$ y de este modo podemos dar la siguiente definición.

Definición 1.1.12. Si A una transformación de Möbius entonces

- A es loxodrómica ssi $|\lambda| \neq 1 \qquad \lambda \neq 0$
- A es hiperbólica ssi $\lambda \in \mathbb{R} \qquad \lambda > 0, \lambda \neq 1$, y
- A es elíptica ssi $|\lambda| = 1 \qquad \lambda \neq 1$.

Lema 1.1.13. Sean A y B dos tranformaciones no parabólicas con exactamente un punto fijo común, entonces $C = A^{-1} \circ B \circ A \circ B^{-1}$ es parabólica.

Demostración Asumiremos sin pérdida de generalidad (por conjugación) que A fija 0 e ∞ y B fija 1 e ∞. Entonces podemos escribir

$$A(z) = K_1 z \quad y \quad B(z) = K_2(z-1) + 1,$$

donde $K_1 \neq 1 \neq K_2$. Luego, haciendo algunos cálculos vemos que

$$C(z) = z + \frac{(K_1 - 1)(K_2 - 1)}{K_1},$$

la cual es parabólica. □

Capítulo 2

Acciones discontinuas sobre $\hat{\mathbb{C}}$

En lo que sigue, clasificaremos los grupos discontinuos cuya región de discontinuidad es igual a $\hat{\mathbb{C}}$.

Debido a que $\hat{\mathbb{C}}$ es compacto, tenemos que si G actúa discontinuamente sobre $\hat{\mathbb{C}}$, esntonces G es finito y $\hat{\mathbb{C}}/G$ es compacto. El hecho que $|G| < \infty$ no es trivial. Éste se expone en la siguiente proposición.

Proposición 2.0.14. Si G actúa discontinuamente sobre $\hat{\mathbb{C}}$ entonces G es un grupo finito.

Demostración. Lo primero que es importante notar es que si G actúa discontinuamente en $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ entonces existe una vecindad U_{z_0} de z_0 tal que $g(U_{z_0}) \cap U_{z_0} \neq \emptyset$ para un número finito de elementos de G (ver [2] para una demostración).

Supongamos que $|G| = \infty$ y sea $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$. Debido a que $|g_{z_0}| < \infty$, tenemos que $\#G \setminus G_{z_0} = \infty$ y $\#\vartheta_{z_0} = \infty$. Sea $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq G$ tal que $\{g_n(z_0)_{n\in\mathbb{N}}\} \subseteq \vartheta_{z_0}$. Como $\hat{\mathbb{C}}$ es compacto, la secuencia $\{g_n(z_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene punto de acumulación $x_0 \in \hat{\mathbb{C}}$. Debido a esto, para toda vecindad U_0 de x_0 existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $g_n(z_0) \in U_0$ para todo $n > N$. Por lo tanto, para toda vecindad U_0 existe $\{g_l = g_m g_n^{-1}\}_{n,m>N}$ tal que $g_l(U_0) \cap U_0 \neq \emptyset$. De este modo, $x_0 \notin \Omega(G)$. Lo cual es un contradicción con el hecho que $\Omega = \hat{\mathbb{C}}$. $\square$

Denotaremos por M a este último cociente, y por N al orden del grupo G. La función $\pi : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow M$ denotará la proyección canónica y $(p; v_1, ..., v_n)$ la fimra de G. De la definicón de firma de un grupo, para cada $j \in \{1, ..., n\}$, tenesmos que $2 \leq v_j \leq N$. Además, cada v_j divide a N debido a que v_j es el orden del estabilizador de x_j en G. Debido a la relación de Riemann- Hurwitz tenemos

$$-2 = N(2p - 2) + NR$$

donde $R = \sum_{j=1}^{n}(1 - \frac{1}{v_j})$.
En particular, la característica $\chi = -2/N$ de G es naegativa. Como $(1-\frac{1}{v_j}) > 0$ para todo j entonces p tiene que ser cero; ya que si $p \geq 1$ tendríamos por un lado que la característica de G es positiva y por otro negativa, lo cual es imposible. De este modo tenemos la siguiente relación (*)

$$2 - \frac{2}{N} = R$$

Consideraremos los siguientes tres casos para nuestro análisis.

1. Si $N = 1$ entonces G es trivial. Por lo tanto G actúa discontinuamente (de modo trivial) sobre $\hat{\mathbb{C}}$.

2. Si $N = 2$ entonces por (*) tenemos que $1 = R$. Como en los casos en que $n = 1$ y $n \geq 3$ esta igualdad no se cumple, el único caso posible es cuando $n = 2$ y por tanto $v_j = 2$ para todo $j \in \{1, 2\}$.

3. Si $N > 2$ obtenemos (**)

   $$1 < 2 - \frac{2}{N} < 2$$

   Adeḿas, como $2 \leq v_j \leq N$ tenemos que

   $$\frac{1}{N} \leq \frac{1}{v_j} \leq \frac{1}{2},$$

   entonces

   $$1 - \tfrac{1}{N} \leq 1 - \tfrac{1}{v_j} \leq \tfrac{1}{2},$$

   para todo $j \in \{1, ..., n\}$.

   Observamos de lo anterior que $\frac{1}{2} \leq 1-\frac{1}{v_j} < 1$. De este modo, usando (*) y (**) descaratmos los casos $n = 0$ y $n = 1$. Tampoco puede ser $n \geq 4$ pues de este modo R sería mayor a 2, y la igualdad (*) no se cumplirá. De esta manera, los únicos casos posibles son $n = 2$ y $n = 3$.

   - Si $n = 2$ entonces por (*) tenemos $\frac{2}{N} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}$. Como $\frac{1}{v_j} \geq \frac{1}{N}$ para cada j, obtenemos que

     $$\frac{2}{N} - \frac{1}{v_2} = \frac{1}{v_1} \geq \frac{1}{N}$$

Lo cual implica que $\frac{1}{N} \geq \frac{1}{v_2}$ y así $v_2 \geq N$. Por tanto, tenemos que $v_2 = N$. Análogamente obtenemos que $v_1 = N$.
En este caso, la acción de G sobre $\hat{\mathbb{C}}$ posee dos puntos fijos globales (es decir, dos puntos que son fijados por todos los elementos del grupo) ya que $v_1 = v_2 = N = |G|$. Como los estabilizadores en G son finitos cíclicos, tenemos que G es finito cíclico.

- Si $n = 3$ entonces por (*) tenemos (***) que $1 + \frac{2}{N} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}$.
Observamos que como $N \geq 3$ entonces
$$1 < 1 + \frac{2}{N} \leq \frac{5}{3}.$$
El más pequeño de los v_j no puede ser 3, pues $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ y $1 + \frac{2}{N} > 1$. Esto contradice (***).
Luego, recordando que $v_1 \leq v_2 \leq v_3$, tenemos que $v_1 = 2$. Reemplazando esto en (***) nos queda
$$\frac{1}{2} + \frac{2}{N} = \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}.$$
Por otro lado, notamos que N debe ser un número par, ya que $v_1 = 2|G_{p_1}|$ donde $p_1 = \pi^{-1}(x_1)$; y $|G_{p_1}|$ divide a $|G| = N$. Obtenemos que $N \geq 4$. De este modo
$$\frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{2}{N} \leq 1.$$
Ahora, consideraremos los siguiente subcasos.
(a) Si $v_2 = 2$ entonces v_3 es arbitrario igual a $\frac{N}{2}$, debido a (***).
(b) Si $v_2 > 2$ entonces digamos $v_2 = 3$. Luego, debido a (***) tenemos
$$\frac{1}{6} + \frac{2}{N} = \frac{1}{v_3}.$$
Así $\frac{1}{6} < \frac{1}{v_3}$ y por lo tanto $v_3 < 6$. De esta forma, las posibilidades para v_3 son $3, 4$ ó 5.

Las firmas y cardinalidades de los grupos que pueden actuar discontinuamente sobre $\hat{\mathbb{C}}$ se resumen en la siguiente tabla.

El cuarto caso es alcanzado por la acción de un grupo dihedral, mientras que los últimos casos son alcanzados por las acciones de los grupos A_4, S_4 y A_5. Estos últimos grupos actuan sobre la esfera dejando invariante al tetrahedro (el caso $2, 3, 3$), un cubo y un octahedro (en el caso $2, 3, 4$) o un dodecahedro y un icosahedro (en el caso $2, 3, 5$). Éstas son las famosas acciones de sólidos platónicos.

Firma de G	$\lvert G\rvert$
$(0;-)$	1
$(o;\nu,\nu)$	ν
$(o;2,2,\nu)$	2ν
$(o;2,3,3)$	12
$(o;2,3,4)$	24
$(o;2,3,5)$	60

Cuadro 2.1: Tabla 1

Capítulo 3

Acciones discontinuas sobre $\mathbb{C}$

En este capítulo clasificaremos los grupos que posiblemente actúan discontinuamente sobre $\mathbb{C}$.

Partimos nuestra clasificación notando que $G \subseteq \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, ya que G deja a $\mathbb{C}$ invariante. En este caso, los elementos de G serán de la forma

$$g : z \longmapsto az + b.$$

Debido a esto, podemos observar lo siguiente.

- Si $a = 1$ entonces $g \neq id$ no tiene puntos fijos en $\mathbb{C}$ (tiene al $\{\infty\}$ en $\hat{\mathbb{C}}$). En este caso, el grupo $G = \langle z \mapsto z + 1 \rangle$.

- Si $a \neq 1$ entonces g debe tener un punto fijo en $\mathbb{C}$. Llamémoslo z_0. De esta forma, todas las potencias de g fijan z_0, y como G_{z_0} es un grupo finito cíclico, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n = id$ (en este caso g es elíptico de orden finito). Así tenemos que a es una raiz de la unidad; ya que como $g^n(z) = a^n z + (a^{n-1} + ... + 1)b$ y $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + ... + 1)$ entonces cuando $a^n = 1$ para algún n tenemos que $(a^{n-1} + ... + 1) = 0$ pues $a \neq 1$.

Ahora, definamos $\varphi : G \longrightarrow S^1$ enviando $g \mapsto a$. Claramente φ es un homomorfismo. Llamamos G_0 al núcleo de φ. De este modo

$$\begin{aligned} G_0 &= \{g \in G : \varphi(g) = 1\} \\ &= \{g \in G : g(z) = z + b\}. \end{aligned}$$

De este modo, G_0 es el único subgrupo (normal) de G libre de puntos fijos. En lo que sigue analizaremos los casos: G_0 trivial y no trivial.

1. Si G_0 es trivial, entonces debido al lema anterior todos los elementos de G tienen un punto fijo común $z_0 \in \mathbb{C}$. De este modo el estabilizador de z_0 es G y así G es un grupo finito cíclico actuando discontinuamente sobre $\hat{\mathbb{C}}$. Por lo tanto no consideraremos estos tales grupos para actuar discontinuamente sobre $\mathbb{C}$.

2. Si G_0 no es trivial entonces G_0 es un grupo abeliano libre a 1 o 2 generadores.

   (i) Asumamos que G_0 es cíclico. De este modo, sin pérdida de generalidad podemos suponer que G_0 está generado por la aplicación $z \mapsto z + 1$. En este caso, tenemos que $\mathbb{C}/G_0$ es conformemente equivalente a $\mathbb{C}^*$. Esto se debe a que existe una función ϕ_0 analítica biyectiva que hace que el siguiente diagrama conmute.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[dr, "\phi"'] & \mathbb{C}/G_0 \arrow[d, "\phi_0"] \\ & \mathbb{C}^* \end{tikzcd}$$

   Donde $\phi : z \mapsto e^{2\pi i z}$ y π_0 es la proyección canónica. Así obtenemos que ϕ_0 induce una acción de G/G_0 en $\mathbb{C}/G_0$. Es decir G/G_0 actúa como grupo de automorfismos conformes de $\mathbb{C}/G_0 \sim \mathbb{C}^*$.

   Por otro lado, sabemos que los elementos del grupo de Aut$\mathbb{C}^*$ son de la forma

$$z \mapsto kz \text{ y } z \mapsto k/z$$

   Levantaremos estos automorfismos de $\mathbb{C}^*$ a automorfismos de $\mathbb{C}$, para que $G/G_0 \subset \mathrm{Aut}\mathbb{C}$. Es decir, queremos encontrar $\bar{A}$ y $\bar{B}$ levantamientos de A y B tales que los siguientes diagramas conmuten.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "\bar{A}"] \arrow[d, "\phi_0"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "\phi_0"] \\ \mathbb{C}^* \arrow[r, "A"'] & \mathbb{C}^* \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "\bar{B}"] \arrow[d, "\phi_0"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "\phi_0"] \\ \mathbb{C}^* \arrow[r, "B"'] & \mathbb{C}^* \end{tikzcd}$$

De lo anterior concluimos que o bien G/G_0 es trivial o bien es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$. Esto es,

$$\{z+n : n \in \mathbb{Z}\} \text{ ó } \{\pm z+n : n \in \mathbb{Z}\} \text{ (ver figuras 1 y 2)}$$

(ii) Asumamos ahora que G_0 tiene rango 2. De este modo, sin pérdida de generalidad podemos suponer que G_0 está generado por las aplicaciones $z \mapsto z+1, z \mapsto z+\tau$ y $\mathbb{C}/G_0$ es un toro. Notamos que sin perder generalidad podemos asumir que $|\tau| \geq 1$, ya que si τ no posee norma mayor o igual a 1, entonces podemos considerar $z \mapsto z+1/\tau$ como uno de los generadores de G_0. Debido a esto, nuevamente obtenemos que G/G_0 actúa como grupo de automorfismos de $\mathbb{C}/G_0$. Aquí usamos el hecho que ahora $\mathbb{C}/G_0 \sim \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$. Asumamos ahora que G/G_0 es no trivial. Sean $g : z \mapsto z+1$ y $h : z \mapsto az+b$ elementos parabólicos y elípticos, respectivamente, en G. Concluimos que

$$h \circ g \circ h^{-1} :\mapsto z+a$$

es un elemento de G_0 o que los múltiplos de los elementos de G son períodos de G_0. Como existe sólo una cantidad finita de períodos en el círculo unitario, es posible encontrar un múltiplo "primitivo" $K = e^{2\pi i/\mu}$ con $\mu \in \mathbb{Z}, \mu > 1$ y μ maximal. Conjugando nuevamente G por un elemento $z \mapsto z + c$ que no estropee la normalización anterior, podemos asumir que G contiene al elemento $z \mapsto Kz$. De esta manera, se tiene que G/G_0 es un grupo finito cíclico, es decir $G/G_0 \cong \mathbb{Z}_\mu$. As; el grupo G consiste de acciones (sobre $\mathbb{C}$) de la forma

$$z \mapsto K^\nu z + n + m\tau, \qquad \nu \in \{0, ..., \mu - 1\}, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$$

Consideremos ahora γ el género de $\mathbb{C}/G(= (\mathbb{C}/G_0)/(G/G_0))$. Sean $x_1 = 0, x_2, ..., x_r$ los puntos fijos de la acción de G/G_0 sobre $\mathbb{C}/G_0$ y sean $v_1, ..., v_r$ los órdenes de sus respectivos estabilizadores. Luego, si usamos la fórmula de Riemann-Hurwitz tenemos $(\star)$

$$0 = 2\gamma - 2 + R,$$

donde $R = \sum_{j=1}^{r}(1 - \frac{1}{v_j})$. De manera análoga a lo hecho en el capítulo anterior concluimos que si $r > 0$ (G/G_0 es no trivial) entonces $\gamma = 0$. Luego, tenemos que $(\star)$ se convierte en la siguiente igualdad $(\star\star)$

$$2 = R.$$

Sea N el orden de G/G_0. Entonces $2 \leq v_j \leq N$. Como

$$\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{v_j}) < 1,$$

entonces los únicos casos posibles son $r = 3$ y $r = 4$ (ver desarrollo del capítulo anterior).
(a) Si $r = 4$ entonces $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 2$, y por ende la ramificación está completamente determinada por el elemento $z \mapsto -z$ y $G/G_0 \cong \mathbb{Z}_2$ (ver figura 3). (b) Si $r = 3$ entonces las únicas posibilidades se resumen en la siguiente tabla 2 (ver figura 4).

El cálculo de los v_j que aparecen en la tabla 2 es sencillo (y análogo al del capítulo anterior). Sin embargo, la descripción de G/G_0 requiere mayor explicación (que es, determinar μ). Sea $z \mapsto Kz$ el generador de G/G_0, el cual también es el generador del subgrupo

v_1	v_2	v_3	G/G_0
2	3	6	$\mathbb{Z}_6$
2	4	4	$\mathbb{Z}_4$
3	3	3	$\mathbb{Z}_3$

Cuadro 3.1: Tabla 2

estabilizador de 0. Como K es un período, tenemos que existen enteros n, m tales que

$$K = n + m\tau.$$

Como $|K| = 1$ y $|\tau| \geq 1$ tenemos que $n = 0$ o $m = 0$. Si $m = 0$ entonces $n = -1 = K$. De este modo, el grupo G posee firma $(0; 2, 2, 2, 2)$, el cual ya fue discutido. Si bien $n = 0$ entonces $m = \pm 1$, pero como $Im\tau > 0$ y $ImK \geq 0$ conluimos que $m = 1$ y $K = \tau$ (también $\mu > 2$). Como $z \mapsto Kz$ genera el estabilizador de 0, tenemos que $\mu = v_3$.

A continuación se exponen los dominios de algunos grupos obtenidos en el análisis anterior.

$G = \langle z \mapsto z + 1 \rangle$

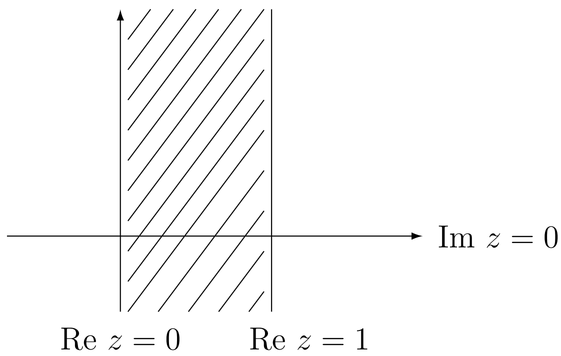

Figura 1

$G = \langle z \mapsto -z, z \mapsto z+1 \rangle$

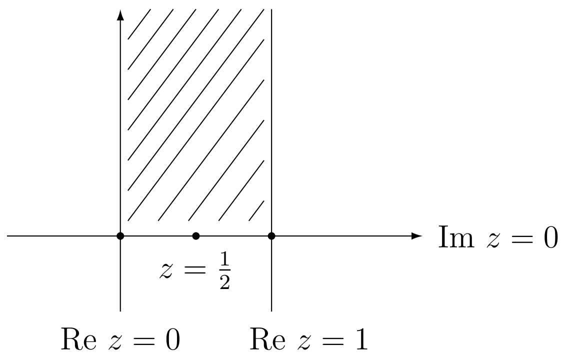

Figura 2

$G = \{z \mapsto \pm z + n + m\tau\}$

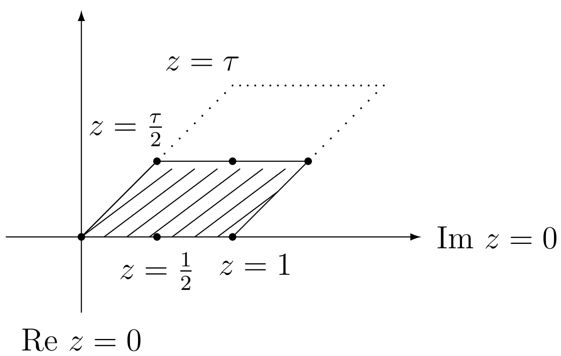

Figura 3

$G = \{z \mapsto K^{\nu} z + n + mK\}$ $K = e^{2\pi i/4} = i$

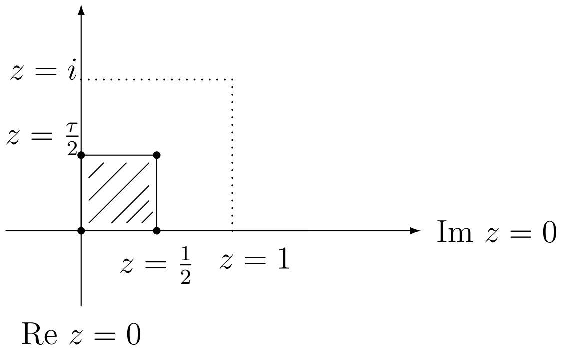

Figura 4

Bibliografía

[1] H. Farkas & I. Kra. *Riemann Surfaces.* Springer-Verlag New York Inc. (1980).

[2] S. Katok. *Fuchsian Groups.* Chicago Lectures in Mathematics Series (1992).

[3] R. Miranda. *Algebraic Curves and Riemann Surfaces.*