BREVE INTRODUCCIÓN A LAS SUPERFICIES K3

VÍCTOR GONZÁLEZ-AGUILERA

1. Introducción

El objetivo de este cursillo es presentar las propiedades básicas de ciertas superficies llamadas actualmente superficies $K3$, ellas al parecer fueron bautizadas con este curioso nombre por André Weil, en honor al trío Kummer, Kahler, Kodaira y a la belleza de montaña $K2$ de Cachemira. La clásica aplicación de períodos (actual teoría de Hodge), ha permitido obtener importantes resultados sobre sus espacios de moduli (Piatetski-Shapiro y Shafarevich), ellas tienen asociados también interesantes retículados (Nikulin y Mukai) y últimamente (McMullen) se ha comenzado a estudiar la dinámica de algunos de sus grupos de automorfismos. Lamentablemente o felizmente los prerequisitos para presentarlas en sociedad, exceden las materias habituales cubiertas en las licenciaturas, los alumnos interesados, si lo desean podrán acceder a ampliaciones de estas breves notas preliminares, lo que les permitiría profundizar algunos aspectos de la geometría compleja. Termino reiterando el carácter preliminar de estas notas y agradeciendo a los organizadores la invitación para desarrollar este cursillo.

2. Superficies algebraicas

2.1. **Definiciones y ejemplos.** Una superficie analítica compleja es una variedad analítica compleja lisa (manifold) X compacta y conexa de dimensión compleja 2. Si denotamos por $\mathcal{M}(X)$ el cuerpo de funciones meromorfas globales en X, diremos (de manera económica) que X es una superficie algebraica si $\mathcal{M}(X)$ separa los puntos de X y separa las tangentes. De manera más explícita:

(1) Para cada par de puntos $p, q \in X$ $(p \neq q)$ hay una función meromorfa global $f \in \mathcal{M}(X)$ de manera que $f(p) \neq f(q)$.
(2) Para cada punto $p \in X$ existen funciones meromorfas globales $f, g \in \mathcal{M}(X)$ de manera que (f, g) son coordenadas locales en p.

La compacidad de X implica que se pueda elejir un número finito $s_1, s_2, ..., s_n$ de funciones meromorfas que separan puntos y tangentes, las cuales se puedan usar para construir una función $\varphi : X \to \mathbb{P}_n$, definida por $\varphi(p) = (1 : s_1(p) : s_2(p) : ... : s_n(p))$, con ello, $\varphi(X)$ es una subvariedad analítica compleja lisa de $\mathbb{P}_n$, la cual debido a un célebre teorema de Chow es un subconjunto algebraico de $\mathbb{P}_n$, es decir $\varphi(X)$ esta determinada como los ceros de un conjunto de polinomios homogéneos, en este sentido X que se identica con su imagen es una superficie algebraica proyectiva.

Ejemplo 2.1. (1) *Sea X el plano proyectivo complejo $\mathbb{P}_2$ con cordenadas homogéneas $(x_0 : x_1 : x_2)$, el es una superficie algebraica.*
(2) *Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión 2 y Λ un $\mathbb{Z}$-submódulo libre de rango 4, el cociente $X \cong V/\Lambda$ es un toro complejo 2-dimensional, X es una superficie analítica compleja, la cual no necesariamente es una superficie algebraica.*
(3) *Sea X una hipersuperficie lisa de grado d de $\mathbb{P}_3$, X es una superficie algebraica.*

Date: September 5, 2011.

Partially supported by Fondecyt #1080030 and Dgip of UTFSM.

2.2. **Funciones y formas.** Sea X una superficie analítica compleja, para cada $p \in X$ existe una carta local (U, φ) donde U es un abierto alrededor de p en X y $\varphi : U \to \mathbb{C}^2$ es un homeomorfismo, si $\varphi(U) = V$, $\varphi(p) = q$, $(z_1, z_2) \in V \subset \mathbb{C}^2$ y $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ entonces (x_1, y_1, x_2, y_2) son coordenadas locales reales en $q \in V$.

Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función, $p \in X$, diremos que f es diferenciable en p si para cada carta (U, φ) en p la expresión de f en esa carta local es diferenciable. Es decir la función:

$$f \circ \varphi^{-1} : V \to \mathbb{R}$$

es una función diferenciable en q de las variables reales (x_1, y_1, x_2, y_2).

Una 1-forma diferencial ω en la carta local (U, φ) es una expresión:

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dy_1 + f_3 dx_2 + f_4 dy_2$$

donde las funciones $f_i(x_1, y_1, x_2, y_2)$, $i \in \{1, ..., 4\}$ son funciones diferenciables en $\varphi(U) = V$. Obviamente esta expresión se transforma si la expresamos en otra carta local (W, ψ) alrededor de p. Asi por ejemplo si F es una función diferenciable en V, la diferencial dF es una 1-forma diferenciable, en la cual $f_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$

Una 1-forma diferencial global en X puede ser vista como una colección de expresiones locales, una en cada elección de las cartas locales, transformandose entre ellas de acuerdo a los cambios de cartas de la variedad X.

El espacio tangente a $q \in V$ es denotado por T_qV y el es generado como $\mathbb{R}$-espacio vectorial por $\{dx_1, dy_1, dx_2, dy_2\}$, podemos considerar los espacios vectoriales

$$\wedge^0 T_qV \cong \mathbb{R} \qquad \wedge^1 T_qV \cong \mathbb{R}^4 \qquad \wedge^2 T_qV \cong \mathbb{R}^6 \qquad \wedge^3 T_qV \cong \mathbb{R}^4 \qquad \wedge^4 T_qV \cong \mathbb{R}$$

Si $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dy_1 + f_3 dx_2 + f_4 dy_2$ es una 1-forma diferencial, podemos definir una 2-forma diferencial $d\omega$ mediante $d\omega = df_1 \wedge dx_1 + df_2 \wedge dy_1 + df_3 \wedge dx_2 + df_4 \wedge dy_2$. Si $\mathcal{E}^k(V)$ denota el espacio vectorial de k-formas diferenciales en V se tiene la sucesión exacta de espacios vectoriales:

Uno puede substituir las variables (x_1, y_1, x_2, y_2) por las variables z_1, $\overline{z_1}$, z_2, $\overline{z_2}$, la forma ω la podemos expresar en la carta local (U, φ) mediante:

$$\omega = g_1 dz_1 + g_2 d\overline{z_1} + g_3 dz_2 + g_4 d\overline{z_2}$$

donde las funciones $g_i(z_1, \overline{z_1}, z_2, \overline{z_2})$, $i \in \{1, ..., 4\}$ son funciones diferenciables en $\varphi(U)$.

Una forma ω puede entonces descomponerse en las componentes que contiene a dz_1 y dz_2, la cual es llamada la parte de tipo $(1, 0)$ y las componentes que contiene a $d\overline{z_1}$ y $d\overline{z_2}$, la cual es llamada la parte de tipo $(0, 1)$.

Si consideramos $dz_1, dz_2, d\overline{z_1}, d\overline{z_2}$, una 2-forma localmente es una expresión:

$$f(z_1, \overline{z_1}, z_2, \overline{z_2}) dz_1 \wedge dz_2$$

$$g_1 dz_1 \wedge d\overline{z_1} + g_2 dz_1 \wedge d\overline{z_2} + g_3 dz_2 \wedge d\overline{z_1} + g_4 dz_2 \wedge d\overline{z_2}$$

$$h d\overline{z_1} \wedge d\overline{z_2}$$

la primera líinea es la parte $(2, 0)$, la segunda la parte $(1, 1)$ y la tercera la parte $(0, 2)$.

En general se denota por $\mathcal{E}^n$ el haz de n-formas diferenciales en X y por $\mathcal{E}^{p,q}$ el haz de $(p + q)$-formas de tipo (p, q), como en nuestro caso $\wedge^n \mathbb{R}^4 \cong \{0\}$ para $n \geq 4$, bastara n-formas diferenciales de grado menor o igual que 4.

las formas holomorfas y meromorfas siempre son de tipo $(p, 0)$ teniendo como coeficientes a funciones holomorfas o meromorfas respectivamente. El haz de p-formas holomorfas es denotado por Ω^p, habitualmente Ω^0 denota el haz $\mathcal{O}$ de funciones holomorfas, el haz de 2-formas meromorfas es denotado por $\mathcal{M}^2$.

Recordemos que una k-forma diferencial definida en el abierto $U \subseteq \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ a valores complejos es una expresión:

$$\omega = \sum_{|I|=p,|J|=q} f_{I,J}(x_1, ..., x_n, y_1, ...y_n) dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p} \wedge dy_{j_1} \wedge ... \wedge dy_{j_q}$$

donde las $f_{I,J}$ son funciones de clase C^∞ en U a valorescomplejos y $p + q = k$, denotaremos por $\mathcal{E}^k(U)$ al conjunto de las k-formas anteriores.

El operador de diferenciación exterior, el cual opera separadamente en las partes reales e imaginarias puede extenderse en un operador:

$$d : \mathcal{E}^k(U) \to \mathcal{E}^{k+1}(U)$$

una k-forma ω es cerrada si $d\omega = 0$, una k-forma η es exacta si existe una $(k-1)$-forma μ de manera que $\eta = d\mu$, la q-ésima cohomología de de Rham es el espacio vectorial:

$$H^q_{DR}(U) \cong \frac{\{k - \text{formas cerradas}\}}{\{k - \text{formas exactas}\}}$$

si los coeficientes de las formas involucradas utilizamos solamente funciones con soporte compacto, la q-ésima cohomología de de Rham con soporte compacto la denotaremos por $H^q_c(U)$.

Recordemos que si $x_1, ..., x_n$ e $y_1, ..., x_m$ son las coordenadas standar de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente, cada aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de clase C^∞ induce una aplicación $f^* : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^m)$ via $f^*(g) = g \circ f$, llamada comunmente la aplicación de pullback. Esta aplicación se extiende a una aplicación de las algebras de todas las formas diferenciales

$$f^* : \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m)$$

que conmuta con el operador d. La aplicación de pullback se extiende a la categoria de las variedades de clase C^∞

Se tiene el lema de Poincaré:

Lema 2.1. *Para la cohomología de de Rham con soporte compacto se tiene:*

$$H^q_c(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}, \ \ si \ \ q = m \qquad H^q_c(\mathbb{R}^m) = \{0\} \ \ si \ \ q \neq m$$

Sea M una variedad analítica compleja de dimensión n, M es una variedad diferenciable lisa orientable de dimensión real $m = 2n$ y $\mathcal{E}^k_M$ el haz de k-formas diferenciales en la variedad M, del lema de Poincaré se tiene la sucesión exacta

$$\{0\} \to \mathbb{C}_M \to \mathcal{E}^0_M \to \mathcal{E}^1_M ... \to \mathcal{E}^k_M \to ...$$

Como la variedad M tiene una partición suave de la unidad, los haces $\mathcal{E}^k_M$ son finos y se tiene

$$H^p(M, \mathcal{E}^k_M) \cong \{0\} \qquad p > 0$$

entonces se tiene:

$$H^q(M, \mathbb{C}_M) \cong \frac{\text{Ker}[d : H^0(M, \mathcal{E}^k_M) \to H^0(M, \mathcal{E}^{k+1}_M)]}{\text{Im}[d : H^0(M, \mathcal{E}^{k-1}_M) \to H^0(M, \mathcal{E}^k_M)]}$$

Sea $\omega \in \mathcal{E}^{p,0}(U)$ diremos que ω es una p-forma diferencial holomorfa en U si $\overline{\partial}(\omega) = 0$, denotaremos por Ω^p_U al conjunto de las p-formas diferenciales holomorfas en U. Si consideramos Ω^p_U como un $\mathbb{C}$-espacio vectorial tendremos una sucesión exacta de espacios vectoriales:

$$\{0\} \to \Omega^p_U \to \mathcal{E}^{p,0}(U) \to \mathcal{E}^{p,1}(U) ... \to \mathcal{E}^{p,q}(U) \to ...$$

los haces Ω^p_M son llamados los haces de p-formas diferenciales holomorfas, como la sucesión:

$$\{0\} \to \mathbb{C}_M \to \Omega^0 \to \Omega^1 ... \to \Omega^p_M \to ...$$

es una resolución para el haz constante $\mathbb{C}_M$, la sucesión:

$$\{0\} \to \Omega^p_M \to \mathcal{E}^{p,0}_M \to \mathcal{E}^{p,1}_M ... \to \mathcal{E}^{p,q}_M \to ...$$

es un resolvente fino del haz Ω^p_M del teorema de Dolbeaut se tiene:

$$H^q(M, \Omega^p_M) \cong \frac{\mathrm{Ker}[\overline{\partial} : H^0(M, \mathcal{E}^{p,q}_M) \to H^0(M, \mathcal{E}^{p,q+1}_M)]}{\mathrm{Im}[\overline{\partial} : H^0(M, \mathcal{E}^{p,q-1}_M) \to H^0(M, \mathcal{E}^{p,q}_M)]}$$

2.3. **Divisores.** Sea X una variedad analítica compleja de dimensión 2, una subvariedad irreducible de dimensión 1 de X será llamada un divisor primo de X. Una suma localmente finita:

$$D = \sum_i a_i D_i$$

donde cada D_i es un divisor primo y $a_i \in \mathbb{Z}$ es un divisor de X. Localmente finita significa que para cada $p \in X$ existe una vecindad abierta U_p que intersecta solamente un número finito de los D_i, en particular si X es compacta se tiene que la suma anterior se realiza sobre un número finito de indices i.

La reunión de todos los D_i se llama el soporte del divisor, si todos los a_i son positivos diremos que el divisor D es efectivo. Denotaremos por $\mathrm{Div}(X)$ el grupo abeliano de los divisores de X, es un $\mathbb{Z}$-módulo. Si X es compacta, el grupo $\mathrm{Div}(X)$ es el grupo abeliano libre generado por los divisores primos de X.

Sea f una función meromorfa en X, podemos asumir que en una vecindad U de $p \in X$ $f/U = \frac{g}{h}$ con g, h funciones holomorfas, sin factores primos en común y h no identicamente nula. Si $g = g_1^{n_1} \cdot ... \cdot g_k^{n_k}$ y $h = h_1^{n_1} \cdot ... \cdot h_l^{n_l}$, denotaremos por $(g)_0$ y $(h)_\infty$ respectivamente a los divisores:

$$(g)_0 = \sum_{i=1}^{i=k} n_i \{g_i = 0\} \qquad (h)_\infty = \sum_{i=1}^{i=l} n_i \{h_i = 0\}$$

les llamaremos el divisor de los ceros y el divisor de los polos. Al divisor:

$$\mathrm{Div}(f) = (g)_0 - (h)_\infty$$

le llamaremos un divisor principal. Los divisores principales son un subgrupo de $\mathrm{Div}(X)$, el grupo cociente es el grupo de clases de divisores de X y será denotado por: $\mathrm{Cl}(M)$. Dos divisores D y $D^{'}$ pertenecen a la misma clase si $D - D^{'} = \mathrm{Div}(f)$

Sea D un divisor en X podemos considerar el conjunto consistente del 0 y de las funciones meromorfas f no nulas tales que $(f) + D$ es un divisor efectivo, es decir: $(f) + D \geq 0$. Este es un espacio vectorial que denotaremos por $\mathcal{L}(D)$, él es de dimensión finita si X es una variedad proyectiva.

2.4. **Clase canónica.** Sea $\{(U_i, \varphi_i)/i \in I\}$ un atlas en la variedad X un divisor en X esta dado por una familia de funciones $\{(f_i)/i \in I\}$ cada una meromorfa en U_i y que satisfagan:

(1) Las funciones (f_i) no son identicamente nulas.
(2) Para cualquier par de indices (i, j), $f_i \cdot f_j^{-1}$ y $f_j \cdot f_i^{-1}$ son holomorfas en $U_i \cap U_j$.

Sea $\dim(X) = 2$ y $p \in X$, supongamos que $p \in U_i$, $\varphi_i(p) \in \varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{C}^2$, una base para el espacio cotangente a X en el punto p, denotado por $T^*_p X$ esta dada en la carta (U_i, φ_i) por: dz_1, dz_2 donde

z_1, z_2 son coordenadas locales del abierto $\varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{C}^2$. Sea $\omega \in \wedge^2 T_p^* X$, la expresión de ω en la cartas locales (U_i, φ_i) y (U_j, φ_j) esta dada por:

$$\omega/U_i = g^i(z_1, z_2) dz_1 \wedge dz_2 \qquad \omega/U_j = g^j(w_1, w_2) dw_1 \wedge dw_2$$

en la intersección $U_i \cap U_j$ se tiene:

$$g^i(z_1, z_2) = g^j(w_1, w_2) J(\frac{z_1, z_2}{w_1, w_2})$$

el jacobiano

$$J(\frac{z_1, z_2}{w_1, w_2})$$

es holomorfo no nulo en cada intersección $U_i \cap U_j$, la forma diferencial meromorfa $\omega \in \wedge^2 T_p^* X$ determina un divisor en X, llamado el divisor de ω y denotado por (ω).

Proposición 2.1. *Sean $\omega_1, \omega_2 \in \wedge^2 T_p^* X$ entonces los divisores (ω_1) y (ω_2) estan en la misma clase de $Cl(X)$.*

Demostración: Sean $\omega_1, \omega_2 \in \wedge^2 T_p^* X$, $\omega_2 = f \cdot \omega_1$ con f meromorfa, entonces:

$$(\omega_2) = (f \cdot \omega_1) = (f) + (\omega_1)$$

y los divisores son equivalentes. □

Sea $\omega \in \wedge^2 T_p^* X$, la clase del divisor determinado por ω es llamada la clase canónica de X y será denotada por K_X, al espacio vectorial $\mathcal{L}(K_X)$ lo denotaremos habitualmente por $H^0(X, K_X)$ y su dimensión será el género geométrico de X.

2.5. **Invariantes númericos.** Como X es una variedad lisa compacta conexa de dimensión real 4, podemos considerar sus grupos de homología simplicial, denotamos por.

$$b_i = \text{rank} H^i(X, \mathbb{Z}) = \dim_{\mathbb{R}} H^i(X, \mathbb{R}) = \dim_{\mathbb{C}} H^i(X, \mathbb{C})$$

los números b_i, $i \in \{1, ..., 4\}$ se llaman los números de Betti de X. La característica topológica de Euler es la suma alternada de los números de Betti:

$$\chi_t(X) = \sum_{i=0}^{4} (-1)^i b_i$$

La irregularidad de X es la dimensión del espacio vectorial de 1-formas holomorfas globales: $q = \dim H^0(X, \Omega^1)$ y el género geométrico es la dimensión del espacio vectorial de 2-formas holomorfas globales $p_g = \dim H^0(X, \Omega^2)$. Se pueden definir los números de Hodge de X como: $h^{p,q} = \dim H^q(X, \Omega^p)$ se tiene que la irregularidad $q = h^{1,0}$ y el género geométrico es $p_g = h^{2,0}$

Si X es una superficie algebraica, podemos utilizar la teoría de Hodge para la descomposición de su cohomología, se tiene entonces:

$$h^{p,q} = h^{q,p} = h^{2-p,2-q} = h^{2-q,2-p}$$

$$b_i = \sum_{p+q=i}^{4} h^{p,q} \qquad b_0 = b_4 = 1$$

estos números se pueden colocar en el siguente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & q & & q & \\ p_g & & h^{1,1} & & p_g \\ & q & & q & \end{array}$$

1

el cual es llamado el diamante de Hodge.

2.6. **Grupo de Néron-Severi.** Consideremos la sucesión exacta de haces

$$\{0\} \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^* \to \{0\}$$

y la sucesión exacta de cohomología:

$$\{0\} \to H^0(X,\mathbb{Z}) \to H^0(X,\mathcal{O}_X) \to H^0(X,\mathcal{O}_X^*) \to ...$$

$$... \to H^1(X,\mathbb{Z}) \to H^1(X,\mathcal{O}_X) \to H^1(X,\mathcal{O}_X^*) \to H^2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X,\mathcal{O}_X)$$

como $b_0 = 1$, $H^0(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, siendo X compacta y conexa $H^0(X,\mathcal{O}_X) \cong \mathbb{C}$, $H^0(X,\mathcal{O}_X^*) \cong \mathbb{C}^*$, $b_1 = h^{1,0} + h^{0,1} = 2q$, $H^1(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2q}$ y finalmente $H^1(X,\mathcal{O}_X) \cong H^0(X,\Omega^1) \cong \mathbb{C}^q$. En la sucesión de cohomología asociada

$$H^1(X,\mathbb{Z}) \to H^1(X,\mathcal{O}_X) \to H^1(X,\mathcal{O}_X^*) \to H^2(X,\mathbb{Z}) \to H^2(X,\mathcal{O}_X)$$

podemos identificar el grupo $H^1(X,\mathcal{O}_X^*)$ de clases de isomorfía de fibrados en recta de X con el grupo de divisores de X módulo equivalencia lineal, denotado por $\mathrm{Pic}(X)$

$$\mathbb{Z}^{2q} \longrightarrow \mathbb{C}^q \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{c_1} H^2(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow{u} H^2(X,\mathcal{O}_X)$$

la aplicación c_1 que a una clase de divisores en X asocia un elemento en $H^2(X,\mathbb{Z})$ es llamada la primera clase de Chern, su imagen módulo torsión es llamado el grupo de Néron-Severi de X y denotado por $NS(X)$. El grupo de Picard $\mathrm{Pic}(X)$ tiene una parte continua la que es el toro complejo q-dimensional $\mathbb{C}^q/\mathrm{Image}(\mathbb{Z}^{2q})$, aparece entonces como una extensión de un toro T y del grupo abeliano finitamente generado $NS(X)$. El rango de $NS(X)$ es llamado el número de Picard de X y denotado por ρ_X.

Se tiene la descomposición de Hodge:

$$H^2(X,\mathbb{C}) \cong H^0(X,\Omega_X^2) \oplus H^1(X,\Omega_X^1) \oplus H^2(X,\Omega_X^0)$$

$H^2(X,\Omega_X^0) \cong H^2(X,\mathcal{O}_X)$, $\mathrm{Image}(c_1) = \ker(u)$, como $H^2(X,\mathbb{Z}) \subset H^2(X,\mathbb{C})$ cada clase en $\mathrm{Image}(c_1)$ considerada en $H^2(X,\mathbb{C})$ debe estar en el núcleo de

$$\pi : H^0(X,\Omega_X^2) \oplus H^1(X,\Omega_X^1) \oplus H^2(X,\mathcal{O}_X) \to H^2(X,\mathcal{O}_X)$$

de manera similar se puede probar que que ella también es nula en $H^0(X,\Omega_X^2)$ y entonces cada clase de $\mathrm{Image}(c_1)$ yace en $H^1(X,\Omega_X^1)$.

Un teorema de Lefschetz prueba que una clase en $H^2(X,\mathbb{Z})$ es la clase de un divisor si y solamente si cuando ella se considera en $H^2(X,\mathbb{C})$ ella yace en la componente $H^1(X,\Omega_X^1)$. Intuitivamente los divisores de X estan entonces controlados de acuerdo a la forma en que el subespacio complejo $H^1(X,\Omega_X^1)$ intersecte al subgrupo discreto $H^2(X,\mathbb{Z})$.

2.7. **El plano proyectivo complejo.** Consideramos el plano proyectivo complejo $\mathbb{P}_2$ con cordenadas homogéneas $(z_0 : z_1 : z_2)$, ella es una superficie algebraica, tenemos la descomposición celular:

$$\mathbb{P}_2 = \mathbb{C}^2 \cup \mathbb{C}^1 \cup \{p\}$$

como la aplicación borde $\partial : e^{2k} \longrightarrow e^{2k-1}$ es nula tenemos que: $H_i(\mathbb{P}_2,\mathbb{Z}) = \{0\}$ si i es impar, $0 < i < 4$.

Si definimos $P_i(\mathbb{C}) = \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{P}_2 \mid z_{i+1} = ... = z_2 = 0\}$ tenemos la descomposición:

$$P_0(\mathbb{C}) \subset P_1(\mathbb{C}) \subset \mathbb{P}_2$$

donde cada $P_i(\mathbb{C}) - P_{i-1}(\mathbb{C})$ es isomorfo a $\mathbb{C}^i$, cada $P_i(\mathbb{C})$ corresponde a una clase de homología $[P_i] \in H_{2i}(\mathbb{P}_2, \mathbb{Z})$. Tendremos entonces:

$$H^0(\mathbb{P}_2,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \qquad H^1(\mathbb{P}_2,\mathbb{Z}) \cong \{0\} \qquad H^2(\mathbb{P}_2,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$
$$H^3(\mathbb{P}_2,\mathbb{Z}) \cong \{0\} \qquad H^4(\mathbb{P}_2,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

Para los números de Betti y la característica de Euler topológica se tiene:

$$b_1 = b_3 = 0 \qquad b_2 = 1 \qquad \chi(\mathbb{P}_2) = 3$$

como $H^q(\mathbb{P}_2, \Omega^p) = \{0\}$ si $p \neq q$ y $H^q(\mathbb{P}_2, \Omega^p) = \mathbb{C}$, entonces $q = 0$ y $p_g = 0$. Para los números de Hodge se tiene:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 0 & & 1 & & 0 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

La sucesión exacta

$$H^1(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathbb{P}_2) \xrightarrow{c_1} H^2(\mathbb{P}_2,\mathbb{Z})$$

se transforma en:

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathbb{P}_2) \xrightarrow{c_1} \mathbb{Z}$$

entonces $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}_2) \cong \mathbb{Z}$ y cada divisor es linealmente equivalente a un multiplo de una recta.

2.8. **Superficies abelianas.** Sea $X \cong \mathbb{C}^2/L$ un toro analítico complejo 2-dimensional, es decir una superficie abeliana, se tiene claramente que $\pi_1(X) \cong H_1(X,\mathbb{Z})$, el producto cup induce una aplicación:

$$\mathrm{cup} : \wedge^n H^1(X,\mathbb{Z}) \to H^n(X,\mathbb{Z})$$

que es un isomorfismo, entonces se tiene:

$$H^0(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \qquad H^1(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^4 \qquad H^2(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^6$$
$$H^3(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^4 \qquad H^4(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

de donde para los números de Betti y la característica d Euler topológica se tiene:

$$b_0 = b_4 = 1 \qquad b_1 = b_3 = 4 \qquad b_2 = 6 \qquad \chi_t(X) = 0$$

Si (z_1, z_2) son coordenadas en $\mathbb{C}^2$ ellas descienden a X y se tienen coordenadas locales que estan bien definidas módulo las translaciones por L. Las 1-formas dz_1, dz_2 y la forma $\omega = dz_1 \wedge dz_2$ estan bien definidas globalmente y generan a $H^0(X,\Omega^1)$ y $H^0(X,\Omega^2)$ de donde la irregularidad es $q = 2$ y el género geométrico es $p_g = 1$. Como la forma $\omega = dz_1 \wedge dz_2$ no tiene polos ni ceros en X, la clase canónica K_X es trivial. Para los números de Hodge se tiene:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 2 & & 2 & \\ 1 & & 4 & & 1 \\ & 2 & & 2 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

El retículado $H^2(X,\mathbb{Z})$ puede intersectar a $H^1(X,\Omega^1) \subset H^2(X,\mathbb{C})$ en cualquier rango comprendido entre 0 y 4. Si el rango fuese 0 no habrian divisores amplios en X y X no sería una superficie algebraica.

Un un toro analítico complejo 2-dimensional es una variedad algebraica proyectiva si y solamente si y solamente si existe una forma bilineal

$$H : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}$$

tal que $H(ix, y)$ sea simétrica y positiva definida y además restringida al retículado L tome valores racionales. La forma H es una polarización en X, tradicionalmente llamada una forma de Riemann.

Sea L el retículado de $\mathbb{C}^2$ generado por los vectores $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (i, 0)$, $v_3 = (\pi\sqrt{2}, \pi)$ y $v_4 = (\sqrt{2}, i)$. Se puede probar que para el toro analítico complejo 2-dimensional $X \cong \mathbb{C}^2/L$ no puede existir una forma de Riemann, entonces el no es una superficie algebraica.

3. Superficies K3

3.1. Generalidades.

Definición 1. *Una superficie algebraica X es una superficie $K3$ si $q_X = h^{0,1} = dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ y la clase canónica $K_X = 0$(es decir $\Omega^2_X \cong \mathcal{O}_X$)*

Puesto que $\Omega^2_X \cong \mathcal{O}_X$, $p_g = \dim H^0(X, \Omega^2_X) = 1$, X admite una 2-forma $\omega_X \in \wedge^2\Omega^1_X$ holomorfa nunca nula, llamada la forma simpléctica. Como

$$H^0(X, \mathcal{O}_X) \cong \mathbb{C} \qquad H^1(X, \mathcal{O}_X) \cong \{0\} \qquad H^2(X, \mathcal{O}_X) \cong H^0(X, \Omega^2_X) \cong \mathbb{C}$$

como X es algebraica proyectiva, de la dualidad de Poincaré y del teorema de la sección hiperplana de Lefschetz se tiene

$$\dim_{\mathbb{Z}} H^0(X, \mathbb{Z}) = \dim_{\mathbb{Z}} H^4(X, \mathbb{Z}) = 1 \qquad \dim_{\mathbb{Z}} H^1(X, \mathbb{Z}) = \dim_{\mathbb{Z}} H^3(X, \mathbb{Z}) = 0$$

de un importante teorema de Noether se puede obtener que $\chi_t(X) = 24$ se tiene que $H^2(X, \mathbb{Z})$ es un $\mathbb{Z}$-módulo libre de rango 22.

En el espacio vectorial $H^2(X, \mathbb{C})$ el producto cup

$$\mu \cdot \nu = \int_X \mu \wedge \nu, \quad \mu, \nu \in H^2(X, \mathbb{C})$$

es una forma bilineal simétrica no degenerada la que dota a $H^2(X, \mathbb{Z})$ de una forma cuadrática unimodular de tipo II, es decir par que denotamos por $<, >$. Del teorema del índice de Hirzebruch, el número valores propios positivos menos el número valores propios negativos es igual a

$$\frac{1}{3}(K_s^2 - 2\chi_t(X)) = -16$$

la signatura es entonces $(3, 19)$, de la clasificación de Serre se tiene para el retículado

$$L \cong \mathbb{H} \perp \mathbb{H} \perp \mathbb{H} \perp \mathbb{E} \perp \mathbb{E}$$

donde $\mathbb{H}$ es el plano hiperbólico, es decir el reticulado $\mathbb{Z}^2$ con $e_1 \cdot e_1 = e_2 \cdot e_2 = 0$, $e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1 = 1$ y $\mathbb{E}$ es el reticulado E_8 con signo cambiado.

Si suponemos que X es una superficie algebraica, siendo ella kahleriana , podemos consider entonces el diamante de Hodge asociado:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 1 & & 20 & & 1 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

Denotamos por ω a un generador de $H^0(X, \Omega_X^2)$, siendo X kahleriana se tiene la descomposición de Hodge:

$$H^2(X, \mathbb{C}) \cong H^0(X, \Omega_X^2) \oplus H^1(X, \Omega_X^1) \oplus H^2(X, \mathcal{O}_X)$$

donde $H^0(X, \Omega_X^2)$ y $H^2(X, \mathcal{O}_X)$ son conjugados y

$$\dim H^0(X, \Omega_X^2) = \dim H^2(X, \mathcal{O}_X) = 1 \qquad \dim H^1(X, \Omega_X^1) = 20$$

se puede demostrar que la restricción de $<,>$ a $H^1(X, \Omega_X^1) \cap H^2(X, \mathbb{R})$ tiene signatura $(1, 19)$. La cohomología $H^2(X, \mathbb{C})$ depende solo de la topología de X, mientras que la estructura de Hodge depende de la posición de la recta $H^0(X, \Omega_X^2) \cong \mathbb{C}\omega$.

Se tiene que $H^1(X, \Omega_X^1) \subset H^2(X, \mathbb{C})$ es el complemento ortogonal de $\mathbb{C}\omega \oplus \mathbb{C}\overline{\omega}$, el grupo $\mathrm{Pic}(X)$ se inyecta en L y se tiene que $\mathrm{Pic}(X) = H^1(X, \Omega_X^1) \cap L$ es un reticulado de signatura $(1, 19)$. Si X varia en moduli, la posición de $H^1(X, \Omega_X^1)$ varia en L y el número de Picard puede variar entre 0 y 20.

3.2. **Cuárticas lisas planas.** Sea X una hipersuperficie cuártica lisa de $\mathbb{P}_3$, como X es compacta $H^0(X, \mathcal{O}_X) \cong \mathbb{C}$

3.3. **Revestimientos dobles del plano.**

3.4. **Superficies de Kummer.** Sea $X \cong \mathbb{C}^2/L$ un toro analítico complejo 2-dimensional, es decir una superficie abeliana, la involución $j(p) = -p$ tiene como puntos fijos a los 16 puntos p_1, p_2,...,p_{16} de 2-torsión de X. Denotamos por $\epsilon : \hat{X} \to X$ el blowing up de estos 16 puntos y $E_i = \epsilon^{-1}(p_i)$ the exceptional curves; j se extiende a una involución σ en $\hat{X}$, denotamos por K_X al cociente $\hat{X}/\{1, \sigma\}$ y por $\pi : \hat{X} \to \hat{X}/\{1, \sigma\}$ a la proyección.

Proposición 3.1. *La superficie K_X es una superficie $K3$, llamada la superficie de Kummer asociada a X.*

Demostración: Veamos primero que K_X es lisa, como $\pi : \hat{X} \to \hat{X}/\{1, \sigma\}$ es étale fuera de las curvas E_i, bastara ver que es lisa en los puntos $\pi(q)$ con $q \in E_i$. Supongamos que (z_1, z_2) son coordenadas locales en X en una vecindad de p_i de manera que $j(z_1) = -z_1$, $j(z_2) = -z_2$. Denotemos por $w_1 = \epsilon^* z_1$ y $w_2 = \epsilon^* z_2$, podemos considerar a w_1 y $t = \frac{w_2}{w_1}$ como coordenadas locales en $\hat{X}$ alrededor de q, $\sigma^* w_1 = -w_1$ y $\sigma^* t = t$ entonces t y $u = w_1^2$ son coordenadas en K_X en una vecindad de $\pi(q)$ y K_X es lisa.

La forma 2-forma $\omega = dz_1 \wedge dz_2$ es invariante bajo j, $\epsilon^*\omega$ es invariante bajo σ y desciende a una 2-forma meromorfa η en K_X. El divisor de η esta concentrado en $\pi(E_i)$, en una vecindad de un punto $q \in E_i$ tendremos.

$$\epsilon^*\omega = dw_1 \wedge dw_2 = dw_1 \wedge d(tw_1) = w_1 dw_1 \wedge dt = \frac{1}{2} du \wedge dt$$

$\eta = \frac{1}{2} du \wedge dt$ es holomorfa y nula en $\pi(q)$ y entonces $\mathrm{Div}(\alpha) = 0$.

Supongamos que K_X tenga una 1-forma holomorfa no nula, entonces $\hat{X}$ tendria una 1-forma holomorfa no nula invariante bajo σ. Como la aplicación: $\epsilon : \hat{X} \to X$ induce un isomorfismo $\epsilon^* : H^0(X, \Omega_X) \to H^0(\hat{X}, \Omega_{\hat{X}})$, X tendria una 1-forma holomorfa no nula invariante bajo j, lo cual no es posible y entonces $q = 0$. □

La superficie $Y \cong X/ < j >$ es una variedad algebraica que tiene exactamente 16 puntos singulares, que son las imagenes de los puntos de 2-torsion de X, denotados por $X[2]$. El grupo $X[2]$ puede ser identificado via un isomofismo con $\mathbb{Z}_2^4$. Si (X, Θ) es una variedad abeliana irreducible principalmente polarizada, la aplicación:

$$\varphi_X = \varphi_{|2\Theta|} : X \to \mathbb{P}_3$$

determinada por el divisor 2Θ se factoriza via una incrustación $\psi : Y \to \mathbb{P}_3$, su imagen $\psi(Y) = Z$ es una hipersuperficie cuártica con 16 puntos dobles y 16 planos singulares en $\mathbb{P}_3$ cada uno de ellos cortando a Z a lo largo de una cónica. En X hay exactamente una curva there D tal que la intersección $D \cap X[2]$ tiene 6 puntos, entonces los 16 planos singulares y los 16 puntos singulares forman una 16_6-configuración.

References

[1] Séminaire Palaiseau. *Géométrie des surfaces $K3$: Modules et Périodes*, Astérisque, **126**. Société Mathématique de France, 1985.

[2] Matsumura, H and Monsky, P. *On the automorphisms of hypersurfaces* . J. Math. Kyoto Univ., **3**, 347-361, 1964.

[3] Mukai, S. *Finite groups of automorphism of $K3$ surfaces and the Mathieu group.* Inventiones Mathematicae, **94**, 183-221, 1988.

[4] Segre, B. *On the quartic surface* $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 0$. Oxford Quart J., **14**, 121-145, 1943.

[5] Varley, R. *Weddle's surfaces, Humbert curves, and certain 4-dimensional abelian variety.* American Journal of Mathematics, **108**, 931-952, 1986.

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María, Casilla 110-V, Valparaíso–Chile

E-mail address: victor.gonzalez@usm.cl