Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Normalización

Alumna : Natalia González
Profesora : Anita Rojas

Índice

1. Singularidades de las curvas algebraicas planas.

Consideremos la siguiente curva algebraica plana:

$$C = \{[z : x : y] \in \mathbb{CP}^2 / F(z, x, y) = 0\},$$

De acuerdo con el teorema de la función implícita, C posee una estructura relativamente simple en un vecindario de un punto no singular, es decir, en la vecindad de dicho punto C corresponde biholomorficamente a un abierto de $\mathbb{C}$. Los puntos tales que

$$\frac{\partial F}{\partial z}(p) = \frac{\partial F}{\partial x}(p) = \frac{\partial F}{\partial y}(p) = 0$$

son llamados *singularidades* o *puntos singulares*.
Supongamos que p es cualquier punto de C, y escojamos un sistema de coordenadas en $\mathbb{CP}^2$ tal que $p = [1 : 0 : 0]$. Además, como mencionamos anteriormente, la ecuación de C es $F(z, x, y) = 0$, y sea

$$f(x, y) = F(1, x, y).$$

Entonces la curva que corresponde a $f(x, y) = 0$ está en $C \cap \mathbb{C}^2$, donde a $\mathbb{C}^2$ lo veremos aquí como la inclusión canónica en $\mathbb{CP}^2$, dada por:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{CP}^2 \\ (x, y) &\longmapsto [1 : x : y]. \end{aligned}$$

Escribiendo $f(x, y)$ como suma de polinomios homogéneos en orden ascendente, obtenemos

$$f(x, y) = f_k(x, y) + \ ... \ + f_d(x, y),$$

donde $f_k \not\equiv 0$ y $f_j(x, y)$, con $j = k, \ldots, d$ son polinomios homogéneos de grado j. Como $f(0, 0) = 0$, tenemos que $k \geq 1$.

Si $k = 1$, entonces

$$f_1(x, y) = ax + by \not\equiv 0,$$

es decir,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = a \neq 0 \qquad \vee \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = b \neq 0.$$

Esto implica que $p = (0, 0)$ es un punto no singular de C y tiene tangente en p de la forma:

$$f_1(x, y) = ax + by = 0.$$

Llamaremos a p un *punto simple* de C.

Para tener un punto singular p de C, es necesario y suficiente que $k \geq 2$.

Si $k = 2$, entonces $f_0 \equiv f_1 \equiv 0$ y

$$f_2(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \not\equiv 0.$$

En este caso C tiene 2 tangentes en p (iguales o distintas) que están dadas por:

$$f_2(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0,$$

luego llamamos a p un *punto doble* de C.

En general si

$$f_0 \equiv f_1 \equiv \cdots \equiv f_{k-1} \equiv 0 \quad \wedge \quad f_k \not\equiv 0,$$

entonces C tiene k tangente (iguales o distintas) en p que están dadas por:

$$f_k(x,y) = 0,$$

y llamamos a p un *punto k-tuplo* de C.

Definición 1.1. *p es llamado un punto k-tuplo* ORDINARIO *de C si p tiene sus k tangentes diferentes.*

Definición 1.2. *Si p es un punto doble ordinario, entonces decimos que p es un nodo.*

2. Conexidad de curvas algebraicas planas irreducibles.

Veremos primero, que el conjunto S de puntos singulares de una curva algebraica C es finito. Para esto, estudiaremos el eliminante y el discriminante de los polinomios.

2.1. El eliminante y el discriminante.

Lema 2.1. *Supongamos que D es un DFU y*

$$f(x) = a_0x^m + ... + a_m \qquad (a_0 \neq 0)$$
$$g(x) = b_0x^n + ... + b_n \qquad (b_0 \neq 0)$$

son polinomios en $D[x]$. Entonces, es necesario y suficiente para que f y g tengan un factor común no trivial, que existan dos polinomios F y G, no ambos triviales, tales que:

$$deg(F) < m \quad \wedge \quad deg(G) < n \qquad \wedge \quad fG = gF.$$

Demostración. Tenemos que $D[x]$ es también un DFU, luego supongamos que h es el factor común no trivial entre f y g. Entonces:

$$f = Fh, \qquad F \in D[x], \qquad deg(F) < m$$
$$g = Gh, \qquad G \in D[x], \qquad deg(G) < n$$

y obtenemos:

$$fG = gF.$$

Inversamente, si existen F y G tales que:

$$deg(F) < m, \quad deg(G) < n, \quad fG = gF,$$

entonces los factores no triviales de f no pueden ser todos los de F ($deg(F) < m$), como $D[x]$ es DFU entonces debe haber un factor de f no trivial, el cual divide a g.

□

Los polinomios F y G pueden ser descritos explícitamente como:

$$F(x) = A_0x^{m-1} + ... + A_{m-1}$$
$$G(x) = B_0x^{n-1} + ... + B_{n-1}.$$

Comparando los coeficientes de cada lado ($fG = gF$) tenemos:

$$a_0B_0 = b_0A_0$$
$$a_1B_0 + a_0B_1 = b_1A_0 + b_0A_1$$
$$\vdots$$
$$a_mB_{n-1} = b_nA_{m-1}.$$

Luego, podemos ver las expresiones anteriores como un sistema lineal homogéneo de ecuaciones en B_i y A_i:

$$\begin{aligned} a_0B_0 - b_0A_0 &= 0 \\ a_1B_0 + a_0B_1 - (b_1A_0 + b_0A_1) &= 0 \\ &\vdots \\ a_mB_{n-1} - (b_nA_{m-1}) &= 0, \end{aligned}$$

por lo que, es necesario y suficiente, para que este sistema tenga una solución no trivial, es que su determinante sea 0.

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_0 & & & & b_0 & & & \\ a_1 & a_0 & & & b_1 & b_0 & & \\ a_2 & a_1 & \ddots & & b_2 & b_1 & \ddots & \\ \vdots & a_2 & & a_0 & \vdots & b_2 & & b_0 \\ \vdots & \vdots & & a_1 & \vdots & \vdots & & b_1 \\ a_m & \vdots & & \vdots & b_n & \vdots & & b_2 \\ & a_m & & \vdots & & b_n & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ & & & a_m & & & & b_n \end{vmatrix}}_{n \text{ columnas} \quad m \text{ columnas}} = 0$$

Transponiendo la matriz del determinante anterior, podemos resumir lo anterior en el siguiente teorema.

Teorema 2.1. *Supongamos que D es un DFU, y*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0x^m + ... + a_m \qquad (a_0 \neq 0) \\ g(x) &= b_0x^n + ... + b_n \end{aligned}$$

son dos polinomios en $D[x]$. Entonces, para que f y g tengan un factor común no trivial, es condición necesaria y suficiente, que el determinante sea igual a 0, es decir,

$$\mathfrak{R}(f, g) = 0,$$

donde

$$\mathfrak{R}(f,g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_m & & & \\ & a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_m & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_m \\ b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_n & & & \\ & b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_n & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

Definición 2.1. *Este determinante, $\mathfrak{R}(f,g)$, es llamado eliminante (o resultante) de f y g.*

Corolario 2.1. *Bajo las hipótesis del Teorema 2.1, tenemos que existen polinomios $\alpha, \beta \in D[x]$, con $deg(\alpha) < n$, $deg(\beta) < m$, tal que*

$$\alpha(x)f(x) + \beta(x)g(x) = \mathfrak{R}(f,g).$$

Demostración. En $\mathfrak{R}(f,g)$ denotemos el cofactor del elemento en la $(m+n)$-ésima columna y la i-ésima fila por A_i y escribamos:

$$\alpha(x) = A_1 x^{n-1} + ... + A_n$$
$$\beta(x) = A_{n+1} x^{m-1} + ... + A_{n+m}.$$

Entonces, es fácil verificar que

$$\alpha(x)f(x) + \beta(x)g(x) = \mathfrak{R}(f,g).$$

□

Definición 2.2. *Supongamos que D es un DFU. Entonces el eliminante de $f \in D[x]$ y su polinomio derivado $f' \in D[x]$, denotado por*

$$\mathfrak{D}(f) \equiv \mathfrak{R}(f,f'),$$

es llamado el discriminante de f.

Corolario 2.2. *Supongamos que D es un DFU. Entonces, es condición necesaria y suficiente, para que f tenga factores múltiples es que su discriminante sea igual a 0, i.e.,*

$$\mathfrak{D}(f) = \mathfrak{R}(f,f') = 0$$

2.2. Finitud de las singularidades.

Lema 2.2. *Supongamos que C es una curva algebraica plana de grado n. Entonces es posible elegir un sistema de coordenadas en $\mathbb{CP}^2$ tal que C posee una ecuación afín de la siguiente forma:*

$$f(x,y) = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \ldots + a_n(x) = 0$$

donde $a_j(x) \in \mathbb{C}[x]$ con $deg(a_j(x)) \leq j$ o $a_j(x) \equiv 0$.

Demostración. Sea la ecuación de C:

$$g(x,y)=0 \qquad \text{con } \ deg(g)=n.$$

Como g no tiene necesariamente la forma que queremos, haremos un cambio de coordenadas conveniente:

$$\begin{aligned} x &= x' + \lambda y' \qquad \text{(donde } \lambda \text{ es una constante a determinar)} \\ y &= y'. \end{aligned}$$

Consideremos el coeficiente $b(\lambda)$ del término que contiene a y'^n en $g(x'+\lambda y', y')$. Claramente $b(\lambda) \not\equiv 0$ y, por lo tanto, posee un número finito de raíces. Entonces podemos elegir λ tal que $b(\lambda) \neq 0$, luego para este λ escogido escribimos:

$$f(x',y') = (\frac{1}{b(\lambda)})g(x'+\lambda y', y'),$$

entonces, en el sistema de coordenadas afín (x', y'), la ecuación de C es:

$$f(x',y')=0$$

□

Teorema 2.2. *Una curva algebraica plana irreducible C tiene, a lo más, una cantidad finita de puntos singulares.*

Demostración. Considerando $f(x,y)=0$ escrita como en el Lema anterior, y viendo a $f \in \mathbb{C}[x][y]$, tenemos que su discriminante sería

$$\mathfrak{D}(f) = \mathfrak{R}(f, f_y),$$

donde $\mathfrak{D}(f) \in \mathbb{C}[x]$ y lo denotaremos por $\mathfrak{D}(f)(x)$.

Como f es irreducible, tenemos que $\mathfrak{D}(f)(x) \not\equiv 0$. Sea S el conjunto de puntos singulares de C, luego

$$S \cap \mathbb{C}^2 \subset \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x,y) = f_y(x,y) = 0\},$$

y por el Teorema 2.1, la proyección de este conjunto en el eje x es:

$$D = \{x \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{D}(f)(x) = 0\},$$

donde D es el conjunto de ceros de un polinomio no nulo y, por tanto, consiste en un número finito de puntos. Además, para cada $x_0 \in \mathbb{C}$ tal que $\mathfrak{D}(f)(x_0) = 0$, puede haber un número finito de y tales que:

$$f(x_0, y) = 0,$$

por lo tanto, $S \cap \mathbb{C}^2$ es un conjunto finito.

Además, como la curva algebraica irreducible C y la linea en infinito L_∞ se pueden intersectar a lo más en un número finito de puntos, $S \cap L_\infty$ claramente contiene un número finito de puntos.
Entonces, podemos concluir que, una curva algebraica plana tiene, a lo más, finitas singularidades.

□

2.3. Conexidad de C y C^*.

Vamos a demostrar a continuación, que tanto $C^* = C \setminus S$ como C son conexos. Entonces de el Teorema de la función implícita sabremos que C^* (el cual consiste en los puntos suaves de C) es una superficie compleja de dimensión 1, es decir, una superficie de Riemann. En forma general, a menos que C mismo sea suave, C^* es una superficie de Riemann no compacta.

Para probar la conexidad de $C^* = C \setminus S$ y de C, debemos hacer uso del concepto de extensión analítica.

2.3.1. Extensiones analíticas.

Digamos que, un *elemento de función analítico* es un par, (Δ, f), el cual consiste en un disco abierto $\Delta \in \mathbb{C}$ y una función analítica f definida en este disco. Dos elementos de función analíticos (Δ_1, f_1) y (Δ_2, f_2) se dice que son *extensiones analíticas directas* uno del otro si:

$$\Delta_1 \cap \Delta_2 \neq \emptyset$$

y en $\Delta_1 \cap \Delta_2$ tenemos

$$f_1 \equiv f_2.$$

Una *cadena de extensiones analíticas* es una colección de elementos de función analíticos

$$(\Delta_1, f_1), (\Delta_2, f_2), \ldots, (\Delta_N, f_N),$$

en la cual cada par de elementos consecutivos son una extensión analítica directa uno del otro. Supongamos que γ es una curva continua conexa (un camino) en $\mathbb{C}$, donde su punto de partida y de llegada son a y b respectivamente, y supongamos que (Δ_0, f_0) es un elemento de función analítico tal que $a \in \Delta_0$. Entonces decimos que (Δ_0, f_0) puede ser *extendido analíticamente a lo largo del camino* γ, si existe una partición de γ,

$$\gamma = \bigcup_{j=o}^{N} \gamma_j, \quad \text{con} \quad a = x_0 \prec x_1 \prec \ldots \prec x_{N+1} = b,$$

donde γ_j es la restricción de γ a $[x_j, x_{j+1}]$, y una cadena de extensiones analíticas que comienza en (Δ_0, f_0)

$$(\Delta_0, f_0), (\Delta_1, f_1), \ldots, (\Delta_N, f_N),$$

tal que $\gamma_j \subset \Delta_j$ con $j = 1, 2, \ldots, N$.

Un famoso resultado de extensión analítica es el siguiente

Teorema 2.3. (Teorema de Monodromía de Riemann). *Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto conexo simple. Si un elemento de función analítico, (Δ, f) puede ser extendido analíticamente a lo largo de cualquier camino dentro de Ω, entonces este elemento puede ser extendido a una función holomorfa univaluada definida en todo Ω.*

Ahora, volviendo a la conexidad de $C^* = C \setminus S$ y C, ya sabemos que C puede tener, a lo más, una cantidad finita de puntos singulares, y que C y L_∞ se intersectan en un cantidad finita de puntos, por lo tanto, la clausura

$$\overline{C^* \cap \mathbb{C}^2} = C.$$

El siguiente resultado es un hecho familiar de topología .

Lema. *Si un conjunto A es conexo, y*

$$A \subset B \subset \overline{A},$$

entonces el conjunto B es también conexo, y en particular $\overline{A}$ también lo es.

Entonces, para probar la conexidad de C^* y de C, sólo necesitamos probar la conexidad de $C^* \cap \mathbb{C}^2$ ya que

$$C^* \cap \mathbb{C}^2 \subset C^* \subset C = \overline{C^* \cap \mathbb{C}^2}.$$

Para simplificar la notación en adelante usaremos C para denotar $C \cap \mathbb{C}^2$ y C^* para $C^* \cap \mathbb{C}^2$. Supongamos que C está dado por la ecuación $f(x, y) = 0$. Podemos elegir un sistema de coordenada talque $f(x, y)$ es de la forma especificada en el Lema (2.2).
Consideremos el discriminante $\mathfrak{D}(f)$ de f. Denotemos el conjunto de ceros de $\mathfrak{D}(f)$ por

$$D = \{x \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{D}(f)(x) = 0\}.$$

Sea

$$\pi : C \to \mathbb{C} \equiv \mathbb{C}_x$$

la proyección de C en el eje x. De la demostración del Teorema (2.2), sabemos que $\pi^{-1}(D)$ es un conjunto finito. Para $x \in \mathbb{C} \setminus D$, tenemos exactamente n puntos distintos

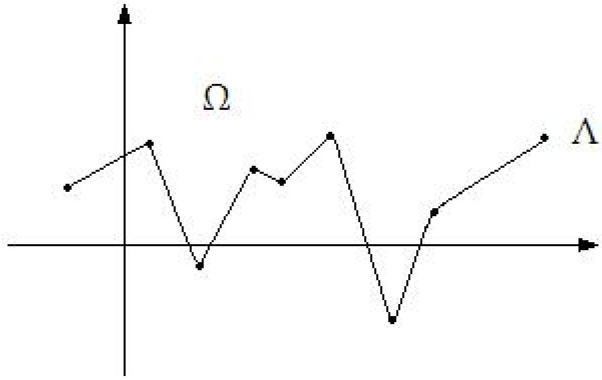
$$(x, y_\nu(x)) \in C \setminus \pi^{-1}(D) \quad \text{con} \quad \nu = 1, \ldots, n,$$

tal que

$$f(x, y_\nu(x)) = 0.$$

Además, para los puntos en $C \setminus \pi^{-1}(D)$, $f_y \neq 0$, y de el Teorema de la función implícita, toda $y_\nu(x)$ puede ser considerada como un elemento de función analítico definido en un disco.

Sea Λ una línea quebrada simple que une los puntos (finitos) de D y que va al infinito. Cortando el plano complejo $\mathbb{C}$ a lo largo de esta línea obtenemos una región simplemente conexa Ω, como se puede ver en la figura a continuación.



Del Teorema de Monodromia de Riemann, todos los n elementos de función $y_\nu(x)$, puede ser extendidos a funciones holomorfas univaluadas definidas sobre todo Ω, y seguiremos denotando estas funciones extendidas como $y_\nu(x)$, $\nu = 1, \ldots, n$. Del Teorema de Identidad para funciones analíticas, las funciones extendidas $y_\nu(x)$, aún satisfacen

$$f(x, y_\nu(x)) = 0.$$

(Esto es llamado una *propiedad hereditaria* para funciones bajo extensiones analíticas, en lo que sigue haremos uso repetidas veces de este principio.)

Ahora extendiendo $y_\mu(x)$, $1 \leq \mu \leq n$, a lo largo del camino γ el cual cruza $\Lambda \setminus D$. La función extendida $y_\mu^*(x)$ aún debe satisfacer la ecuación

$$f(x, y_\mu^*(x)) = 0 \qquad \text{(prop. hereditaria)}$$

y debe pertenecer a $\{y_i(x)\}_{i=1}^n$. Si tenemos que

$$y_\mu(x) \neq y_{\mu'}(x),$$

entonces después de la extensión tendremos también

$$y_\mu^*(x) \neq y_{\mu'}^*(x)$$

(de otra manera, podríamos obtener $y_\mu(x) = y_{\mu'}(x)$ a través de una extensión a lo largo del camino inverso $-\gamma$). Si existe un camino $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus D$ tal que $y_\mu(x)$ y $y_\nu(x)$ son mutuamente extendibles a través de γ, entonces decimos que

$$y_\mu(x) \sim y_\nu(x),$$

donde $\sim$ es claramente una relación de equivalencia.

Usando esta relación para dividir $\{y_i(x)\}_{i=1}^n$ en clases de equivalencia $E_1, E_2, \ldots, E_l$, debemos probar que para todo E_j tenemos que

$$\prod_{y_\nu \in E_j} (y - y_\nu(x)) \in \mathbb{C}[x, y],$$

y

$$f(x,y)=\prod_{j=1}^{l}\prod_{y_\nu\in E_j}(y-y_\nu(x)).$$

Por lo que, si $f(x,y)$ es irreducible, sólo podemos tener $l=1$, i.e., $\{y_i(x)\}_{i=1}^n$ pertenecen a una misma clase de equivalencia y son todos mutuamente extendibles a lo largo de caminos en $\mathbb{C}\setminus D$. Es decir, dados cualesquiera dos puntos

$$(x_0,y_\mu(x_0))\qquad \text{y} \qquad (x_1,y_\nu(x_1))$$

en $C\setminus\pi^{-1}(D)$, pueden ser conectados por un camino. Esto prueba que $C\setminus\pi^{-1}(D)$ es conexo.

Entonces probar que C y C^* son conexos se reduce a probar el siguiente lema.

Lema 2.3. *(Usando la misma notación precedente.) Para cualquier clase de equivalencia E de la relación $\sim$ formada por $\{y_i(x)\}_{i=1}^n$, tenemos que*

$$\prod_{y_\nu\in E}(y-y_\nu(x))\in\mathbb{C}[x,y],$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $E=\{y_1(x),\ldots,y_m(x)\}$. Entonces

$$\begin{aligned}\prod_{y_\nu\in E}(y-y_\nu(x))&=\prod_{\lambda=1}^{m}(y-y_\lambda(x))\\&=y^m+b_1(x)y^{m-1}+\ldots+b_m(x),\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}b_1(x)&=-\sum_{\lambda=1}^{m}y_\lambda(x),\\ b_2(x)&=\sum_{1\leq\lambda\leq\mu\leq m}y_\lambda(x)y_\mu(x),\\&\vdots\\ b_m(x)&=(-1)^m y_1(x)\cdots y_m(x).\end{aligned}$$

Ya que la extensión de cualquier camino en $\mathbb{C}\setminus D$ solo nos conduce a una permutación en E, cada $b_j(x)$, $j=1,\ldots,m$, que sigue siendo el mismo bajo dicha permutación, define una función holomorfa univaluada en $\mathbb{C}\setminus D$.
Por el Teorema de Rouché, si los coeficientes del polinomio

$$y^n+a_1y^{n-1}+\ldots+a_n$$

satifacen que

$$|a_j|\leq M \qquad \text{con} \quad j=1,\ldots,n,$$

entonces, toda raíz de este polinomio debe satisfacer que

$$|y_\nu|\leq 1+M \qquad \text{con} \quad \nu=1,\ldots,n.$$

Por lo tanto, todo $b_\lambda(x)$, $\lambda = 1, \ldots, m$, definido anteriormente, está acotado en una vecindad de cada punto de D. Por el Teorema de extensión de Riemann, cada $b_\lambda(x)$ puede ser extendido a una función holomorfa en todo $\mathbb{C}$, y seguiremos denotando la función extendida como $b_\lambda(x)$.

Ahora debemos probar que todo $b_\lambda(x)$, $\lambda = 1, \ldots, m$, es de hecho un polinomio. Para hacer esto, examinaremos las vecindades de $b_\lambda(x)$ en el infinito, luego sólo necesitariamos mostrar que el infinito es un polo para cada $b_\lambda(x)$.
En el polinomio original

$$f(x, y) = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \ldots + a_n(x),$$

hacemos un cambio de variables

$$x = \frac{1}{x'},$$

$$y = \frac{y'}{x'},$$

para obtener

$$\begin{aligned} x'^n f\left(\frac{1}{x'}, \frac{y'}{x'}\right) = {} & y'^n + \left(x' a_1\left(\frac{1}{x'}\right)\right) y'^{(n-1)} \\ & + \ldots + x'^n a_n\left(\frac{1}{x'}\right). \end{aligned}$$

Como estamos trabajando bajo las hipótesis que $f(x, y)$ satisface las condiciones del Lema (2.2), tenemos que

$$deg(a_\nu) \leq \nu \qquad \vee \qquad a_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Entonces,

$$x'^\nu a_\nu\left(\frac{1}{x'}\right) \in \mathbb{C}[x']$$

y, por lo tanto,

$$y'^n + \left(x' a_1\left(\frac{1}{x'}\right)\right) y'^{(n-1)} + \ldots + x'^n a_n\left(\frac{1}{x'}\right) \in \mathbb{C}[x', y'].$$

Fijemos x' y consideremos este polinomio como un polinomio en y'. Entonces $r \equiv r(x')$ es una raíz de este polinomio en y'

$$\iff \qquad x'^n f(1/x', r/x') = 0,$$

$$\iff \qquad f(x, r/x') = 0,$$

$$\iff \qquad r/x' = y_\nu(x) \text{ para algún } \nu \in \{1, \ldots, n\}.$$

$$\iff \qquad r = x' y_\nu(1/x') \text{ para algún } \nu \in \{1, \ldots, n\}.$$

Entonces, en el conjunto

$$\{x' \mid 1/x' \in \Omega \equiv \mathbb{C} \setminus \Lambda\},$$

las raices del polinomio anterior en y' dan lugar a n funciones holomorfas

$$y'_\nu(x') = x' y_\nu \left(\frac{1}{x'}\right) \qquad \text{con } \nu = 1, \ldots, n,$$

y m de estas, $\{y'_1(x'), \ldots, y'_m(x')\}$, son permutadas entre sí cuando son extendidas analíticamente a lo largo de cualquier camino que evite el conjunto

$$\{x' \mid x' = 0 \quad \vee \quad 1/x' \in D\}.$$

Ahora observemos que, por la misma razón anterior, cada $y'_\nu(x')$ está acotado en una vecindad de $x' = 0$. Más aún,

$$\begin{aligned}
x' b_1 \left(\frac{1}{x'}\right) &= - x' \sum_{\lambda=1}^{m} y_\lambda \left(\frac{1}{x'}\right) = - \sum_{\lambda=1}^{m} y'_\lambda(x'), \\
{x'}^2 b_2 \left(\frac{1}{x'}\right) &= {x'}^2 \sum_{1 \le \lambda < \mu \le n} y_\lambda \left(\frac{1}{x'}\right) y_\mu \left(\frac{1}{x'}\right) \\
&= \sum_{1 \le \lambda < \mu \le n} y'_\lambda(x') y'_\mu(x'), \\
&\vdots \\
{x'}^m b_m \left(\frac{1}{x'}\right) &= (-1)^m {x'}^m y_1 \left(\frac{1}{x'}\right) \cdots y_m \left(\frac{1}{x'}\right) \\
&= (-1)^m y'_1(x') \cdots y'_m(x').
\end{aligned}$$

Luego ${x'}^\nu b_\nu(1/x'),\ \nu = 1, \ldots, m$, son todas funciones holomorfas acotadas en una vecindad de $x' = 0$. Esto nos dice que cada $b_\lambda(1/x')$ tiene un polo en $x' = 0$ de multiplicidad a lo más λ, por lo que, $b_\lambda(x)$ es un polinomio de grado a lo más λ.

□

La discusión precedente probó que $C \setminus \pi^{-1}(D)$ es conexo, y como dijimos anteriormente, la conexidad de $C^* = C \setminus S$ y C es una consecuencia directa de esto, debido a que

$$C \setminus \pi^{-1}(D) \subset C^* \subset C = \overline{C \setminus \pi^{-1}(D)}.$$

Por lo tanto, hemos probado completamente el siguiente importante teorema.

Teorema 2.4. *Supongamos que C es una curva algebraica plana irreducible. Entonces C y C^*, el conjunto de los puntos suaves de C, son ambas conexas en $\mathbb{CP}^2$.*

Corolario 2.3. *C^* es una superficie de Riemann (no necesariamente compacta).*

Aunque este corolario, ya está probado, nos gustaría tener una idea más clara de las cartas correpondientes a C^*, para lo cual veremos lo que es la normalización de una curva.

3. El concepto de normalización.

La idea general de la normalización es que, para una curva algebraica irreducible,

$$C \subset \mathbb{CP}^2$$

encontremos una superficie de Riemann compacta $\tilde{C}$ y una función holomorfa,

$$\sigma : \tilde{C} \to \mathbb{CP}^2$$

tal que

$$\sigma(\tilde{C}) = C.$$

Formalmente tenemos que,

Definición 3.1. *Supongamos que C es una curva algebraica plana irreducible, y S es el conjunto de sus puntos singulares. Entonces, si existe una superficie de Riemann compacta $\tilde{C}$ y una función holomorfa*

$$\sigma : \tilde{C} \to \mathbb{CP}^2,$$

tal que

1. $\sigma(\tilde{C}) = C$
2. $\sigma^{-1}(S)$ *es un conjunto finito,*
3. $\sigma : \tilde{C} \setminus \sigma^{-1}(S) \to C \setminus S$ *es inyectiva*

Entonces llamamos $(\tilde{C}, \sigma)$ la normalización de C. Cuando no haya peligro de confusión llamaremos a $\tilde{C}$ la normalización de C.

Gracias a la normalización, podemos ver ahora cualquier curva algebraica irreducible (ya no necesariamente no-singular) como una superficie de Riemann, además como veremos a continuación, dicha normalización será única salvo isomorfismo. Notemos que, para el caso en que las singularidades son nodos, tenemos en que en estos puntos la curva tiene dos tangentes diferentes, pero que localmente corresponden a tramos diferentes de la curva, por lo que, el camino para construir la normalización, es primero separar las componentes con tangentes diferentes, y asi poder eliminar este tipo de singularidades. Es por esto, que la normalización también recibe el nombre de "desingularización".

Lema 3.1. *Supongamos que $\tilde{C}$, $\tilde{C}'$ son superficies de Riemann, y*

$$h : \tilde{C} \to \tilde{C}'$$

es una función holomorfa epiyectiva, la cual es inyectiva en un subconjunto abierto denso de $\tilde{C}$. Entonces h es una función biholomorfa.

Demostración. Es suficiente probar que en un vecindario de cada punto $p \in \tilde{C}$, h es localmente biholomorfa. Sabemos que h puede ser representada localmente por

$$w = z^{\mu},$$

donde μ es un entero positivo. Si $\mu > 1$, entonces h no será inyectiva en $\{z \neq 0\}$, y en particular no será inyectiva en un subconjunto denso de $\tilde{C}$. Por lo tanto, $\mu = 1$, y h es localmente biholomorfa en un vecindario de cada punto en $\tilde{C}$. □

Teorema 3.1. *La normalización de una curva algebraica C es única bajo isomorfismo, es decir, si $(\tilde{C},\sigma)$ y $(\tilde{C}',\sigma')$ son normalizaciones de C, entonces existe un isomorfismo (una función biholomorfa),*

$$\tau : \tilde{C} \to \tilde{C}',$$

tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C} & \xrightarrow{\tau} & \tilde{C}' \\ \sigma \searrow & & \swarrow \sigma' \\ & C & \end{array}$$

i.e., $\sigma = \sigma' \circ \tau$.

Demostración. Tomando S para denotar el conjunto de puntos singulares de C, consideremos la función holomorfa

$$\tilde{C} \setminus \sigma^{-1}(S) \xrightarrow{\sigma} C \setminus S \xrightarrow{(\sigma')^{-1}} \tilde{C}' \setminus (\sigma')^{-1}(S).$$

Es fácil ver que esta función puede ser extendida continuamente a todo $\tilde{C}$. Luego, por el Lema precedente, la función extendida es un biholomorfismo entre $\tilde{C}$ y $\tilde{C}'$, y denotándolo por τ, obtenemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C} & \xrightarrow{\tau} & \tilde{C}' \\ \sigma \searrow & & \swarrow \sigma' \\ & C & \end{array}$$

$\square$

4. Desingularización de nodos.

4.1. Conectando perforaciones en superficies de Riemann.

Si consideramos una superficie de Riemann, y le quitamos un punto, aún tendremos una superficie de Riemann, aunque tenga una perforación en ella. Para realizar el proceso inverso, debemos definir lo que es una 'perforación' en forma apropiada.

Definición 4.1. *Sea Y una superficie de Riemann. Una carta perforada en Y, es una carta $\phi : U \to V$ en Y tal que V contiene un disco perforado $D_0 = \{z \mid 0 < ||z - z_0|| < \epsilon\}$, con la clausura en Y de $\phi^{-1}(D_0)$ contenida en U, y esta clausura es llevada via ϕ al disco perforado $D_1 = \{z \mid 0 < ||z - z_0|| \leq \epsilon\}$.*

Ahora, supongamos que Y es una superficie de Riemann con una carta perforada $\phi : U \to V$ en ella. Sea D_0 el disco perforado como en la definición, y sea D el disco abierto $D = \{z \mid ||z - z_0|| < \epsilon\}$. Notemos que, D es también una superficie de Riemann, y D_0 es un subconjunto abierto de D, el cual es isomorfo al conjunto abierto $\phi^{-1}(D_0)$ de Y via ϕ con las restricciones convenientes. Formemos ahora el espacio de identificación $Z = Y \amalg D/\phi$; la hipótesis formulada sobre la clausura de $\phi^{-1}(D_0)$ nos implica directamente que Z es Hausdorff. Luego Z es una superficie de Riemann, a la cual nos referiremos como la superficie obtenida de Y *conectando la perforación en la carta perforada ϕ.*

4.2. Nodos en una curva plana.

Consideremos una curva plana afín X, dada por $f(z, w) = 0$, tal que todos los puntos de X, salvo una cantidad finita de ellos, tiene al menos una de las derivadas parciales $\partial f/\partial z$ ó $\partial f/\partial w$ distinta de cero. Luego, la eliminación de estos puntos nos da como resultado una superficie de Riemann 'con perforaciones', y bajo algunas hipótesis no muy restrictivas, no nos será díficil encontrar las cartas perforadas correspondientes.

Supongamos que X tiene un nodo en el punto $p = (z_0, w_0)$, luego si expandemos f alrededor de este punto, tendremos que, los términos constantes son 0 (ya que $f(p) = 0$), los términos lineales son 0 (ya que p es un pto. doble), y los términos cuadráticos serán de la forma

$$a(z - z_0)^2 + b(z - z_0)(w - w_0) + c(w - w_0)^2,$$

donde la ecuación cuadrática homogénea $ax^2+bxy+cy^2$ se factoriza en forma lineal $l_1(x, y)l_2(x, y)$, donde l_1 y l_2 son polinomios homogéneos distintos.

El Teorema de la función inversa aplicado a un punto no-singular de $f(z, w) = 0$, puede ser interpretado como que, cerca de un punto suave, el lugar de ceros X de f se ve muy parecido a la línea tangente a X en p. En otras palabras, si $f(p) = 0$ y una de las derivadas parciales no es cero en p, entonces X es localmente el gráfico de una función, el cual, por supuesto, localmente se ve como una línea tangente. Notemos que la tangente en un punto es, exactamente, los ceros de la parte lineal de f, expandido alrededor del punto.

Ahora bien, el mismo principio puede ser aplicado aquí, pero en un orden mayor: si X tiene un nodo en p, entonces localmente cerca de p, la curva debe verse como los ceros de su parte cuadrática. Más precisamente

Lema 4.1. *Supongamos que el lugar de ceros X de $f(z,w)$ tiene un nodo en $p = (z_0, w_0)$. Factorizando el término cuadrático de f como dijimos anteriormente, escribimos*

$$f(z,w) = l_1(z - z_0, w - w_0)l_2(z - z_0, w - w_0) + t.o.s.,$$

donde l_i son polinomios homogéneos distintos. Entonces, como serie de potencia, f se factoriza como $f = gh$, donde

$$g(z,w) = l_1(z - z_0, w - w_0) + t.o.s.\ ,$$

$$h(z,w) = l_2(z - z_0, w - w_0) + t.o.s.,$$

Demostración. Este Lema es una versión simple de un resultado más general, conocido como

Lema. (Lema de Hensel.) *Si el término de menor orden de una serie de potencia, se factoriza en distintos factores, entonces la serie completa se puede factorizar.*

En este caso especial, el lema es fácil de ver. Para facilitar las cosas, hagamos un cambio de coordenadas

$$x = l_1(z - z_0, w - w_0) \quad \wedge \quad y = l_2(z - z_0, w - w_0),$$

y escribimos

$$f(x,y) = xy + \sum_{i=3}^{\infty} f_i(x,y),$$

donde f_i es homogéneo de grado i en x y en y. Buscamos series de potencia $g = x + \Sigma_{i\geq 2} g_i$ y $h = y + \Sigma_{i\geq 2} h_i$ tal que $f = gh$, donde tenemos que g_i y h_i son homogéneos de grado i. Notamos primero que, imponiendo $f = gh$, esto fuerza a que

$$f_i = xh_{i-1} + yg_{i-1} + \sum_{j=2}^{i-2} g_j h_{i-j},$$

para cada $i \geq 3$. Para $i = 3$, esto requiere simplemente que $f_3 = xh_2 + yg_2$, y claramente para cada f_3 de grado 3 se puede resolver esto para g_2 y h_2.

Finalmente, se procede por inducción para demostrar lo que falta, y este método recursivo produce la serie de potencia g y h, factores de f.

$\square$

4.3. Desingularización de los nodos (o normalización de la curva).

Tenemos que cerca de p, el lugar de ceros X de f es el lugar de ceros de gh, el cual es simplemente la unión de los lugares de ceros X_g de g y X_h de h.
Por separado, X_g y X_h son, cerca de p, superficies de Riemann! Usando un cambio de coordenadas como en la demostración anterior, podemos ver por ejemplo que

$$g(x, y) = x + t.o.s(x, y,)$$

y así, $\partial g/\partial x(p) = 1 \neq 0$. Por ende, el Teorema de la función implícita nos dice que cerca de p, X_g es el gráfico de una función en y, y por lo tanto, es una superficie de Riemann. Lo mismo vale para X_h.
Ahora, volviendo a la curva singular X definida por $f = 0$ en p, y borrando el punto p, producimos una superficie de Riemann, por lo menos cerca de p. Esta superficie Y, cerca de p, es igual a la unión de $X_g \setminus \{p\}$ y $X_h \setminus \{p\}$. Sea U_g y U_h los abiertos en Y que son isomorfos a $X_g \setminus \{p\}$ y $X_h \setminus \{p\}$ (tomando las restricciones necesarias), respectivamente. Entonces Y tiene dos cartas perforadas evidentes, una de la composición del isomorfismo de U_g con $X_g \setminus \{p\}$ con la carta de X_g cerca de p, y el otro considerando lo mismo para U_h. Conectar estas dos cartas perforadas es llamado *resolver el nodo de X en p.*