AUTOMORFISMOS DE UNA VARIEDAD ALGEBRAICA PROYECTIVA

VÍCTOR GONZÁLEZ AGUILERA

Abstract. Un automorfismo de una variedad algebraica X es un morfismo invertible de ella, el grupo de todos los automorfismos de X, denotado por $\mathrm{Aut}(X)$ es un invariante importante de X. El estudio de la acción de $\mathrm{Aut}(X)$ en objetos como $\mathrm{Pic}(X)$ (grupo de Picard), y los grupos de cohomología $H^p(X, \mathbb{C})$, pueden usarse para el estudio de la variedad X.

En esta charla de carácter general e introductorio, se revisará este concepto en el caso de algunas variedades proyectivas y se presentará la estructura y descripción del grupo $\mathrm{Aut}(X)$ en algunos casos particulares. Cualquier corrección y/o observación a estas notas preliminares el altamente bienvenida.

1. Tipos de automorfismos

Sean $X \subset \mathbb{P}_N$ e $Y \subset \mathbb{P}_M$ variedades algebraicas proyectivas definidas por ideales homogéneos $I \subset k[t_0, ..., t_N]$ y $J \subset k[u_0, ..., u_M]$ respectivamente. Sea $\Phi : k[u_0, ..., u_M]/J \to k[t_0, ..., t_N]/I$ un homomorfismo dado por polinomios $P_0, ...P_N \in k[t_0, ..., t_N]$ cuyas clases laterales módulo I son imagenes de los u_i módulo J.

Si todos los $P_0, ...P_N$ son homogéneos de grado d para algun $d \geq 0$ y el ideal generado por I junto a los $P_0, ...P_N$ is irrelevante (contiene al ideal $k[t_0, ..., t_N]_{\geq s}$) entonces:

$$(a_0, ..., a_N) \to (P_0(a_0, ..., a_N), ..., P_M(a_0, ..., a_N))$$

determina una aplicación regular $f : X \to Y$.

Un automorfismo regular de X es una aplicación regular $f : X \to X$ que tenga inversa regular.

Tipos de automorfismos

Sea X una variedad algebraica y $K(X)$ su cuerpo de funciones racionales. Una aplicación $f : X \to X$ es un automorfismo birracional de X si la aplicación $f^* : K(X) \to K(X)$ es un isomorfismo de k-algebras.

Tenemos tres tipos de automorfismos, los automorfismos birracionales denotados por $\mathrm{Bir}(X)$, los automorfismos regulares denotados por $\mathrm{Aut}(X)$ y el subgrupo de los automorfismos lineales denotados por $\mathrm{Lin}(X) = \{f \in \mathrm{Aut}(X)/\exists \widetilde{f} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}_N)/\widetilde{f}/X = f\}$

Sobre la inmersión

Sea $X \subseteq \mathbb{P}_N$ entonces existe una aplicación $\Phi : X \hookrightarrow \mathbb{P}_N$, la que induce $\Phi^* : \mathrm{Pic}(\mathbb{P}_N) \to \mathrm{Pic}(X)$, $\Phi^*(\mathcal{O}(1 \cdot H))$ es un haz invertible que es generado por las secciones globales $s_i = \Phi^*(x_i)$.

Recíprocamente si $\mathcal{L}$ es un haz invertible en X y s_0, s_1,...,s_N son secciones globales $s_i \in H^0(X, \mathcal{L})$ que generan $\mathcal{L}$, entonces existe una única aplicación $\Phi_{\mathcal{L}} : X \hookrightarrow \mathbb{P}_N$ de manera que $\Phi^*_{\mathcal{L}}(\mathcal{O}(1 \cdot H)) = \mathcal{L}$ y además $s_i = \Phi^*_{\mathcal{L}}(x_i)$.

El caso $X \cong \mathbb{P}_N$

En el caso $X \cong \mathbb{P}_N$ se tiene:

$$\mathrm{Lin}(\mathbb{P}_N) = \mathrm{Aut}(\mathbb{P}_N) = PGL(n+1, k) \subset \mathrm{Bir}(\mathbb{P}_N)$$

Cada elemento $A \in GL(N+1, k)$ induce un automorfismo del anillo $k[x_0, x_1, ..., x_N]$ y entonces un automorfismo de $\mathbb{P}_N$. Como λA induce el mismo automorfismo $PGL(N+1, k)$ opera como grupo de automorfismos de $\mathbb{P}_N$. Además si $\widetilde{A}$ opera trivialmente fija $e_0 = (1, ..., 0)$,...,$e_N = (0, ..., 1)$ y $(1, ..., 1)$, entonces es la identidad en $PGL(N+1, k)$.

Por otra parte, si $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}_N)$, el automorfismo f induce un automorfismo f^* de $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}_N)$, como $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}_N) \cong \mathbb{Z}$, hay dos posibilidades, $f^*((\mathcal{O}(1 \cdot H)) = \mathcal{O}(1 \cdot H)$ o $f^*((\mathcal{O}(1 \cdot H)) = \mathcal{O}(-1 \cdot H)$, obtenemos solamente el primer caso, ya que $\mathcal{O}(-1 \cdot H)$ no tiene secciones. Como $f^*((\mathcal{O}(1 \cdot H)) = \mathcal{O}(1 \cdot H)$, $f^*(x_i)$ es una base del k-espacio vectorial $H^0(\mathbb{P}_N, \mathcal{O}(1 \cdot H))$ y obtenemos los elementos $s_i = \sum_{j=0}^{N} a_{ij} x_j$ con $A = (a_{ij})$ una matriz invertible.

Se puede notar que $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}_N) = PGL(N+1, k)$ es un grupo algebraico $(N+1)^2 - 1$-dimensional.

Se tiene por ejemplo que $f(x_0, x_1, x_2) = (x_1 x_2, x_0 x_2, x_0 x_1) \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}_2)$ pero no pertenece a $\mathrm{Lin}(\mathbb{P}_2)$.

Algunas preguntas

Se tienen las siguentes preguntas naturales:

(1) Cuando se tiene $\mathrm{Bir}(X) = \mathrm{Aut}(X)$?

(2) Cuando cada automorfismo de $\mathrm{Aut}(X)$ es inducido por un automorfismo de $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}_n) = PGL(n+1,k)$?
(3) Cuando $\mathrm{Aut}(X)$ es un grupo finito ?
(4) Como interviene el grupo de Picard ?
(5) Como interviene la cohomología $H^k(X,\mathbb{C})$?
(6) Como interviene la clase canónica K_X ?
(7) Que resultados se tienen si X es lisa ?

Nos concentraremos fundamentalmente en los automorfismos regulares y los automorfismos lineales.

Sea X una variedad algebraica proyectiva de dimensión n y grado d de $\mathbb{P}_N$ denotamos por $I_X = (g_1, ..., g_r)$ al ideal homogéneo de X. Sea $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}_N)$, X es invariante bajo f si $f(I_X) = I_X$, en este caso se tiene que $\mathrm{Aut}(X)$ es un grupo algebraico lineal definido por ecuaciones de grado a lo más d. Entonces $\mathrm{Aut}(X)$ puede ser un grupo finito (0-dimensional) o puede tener dimensión mayor que 0.

2. Curvas

Sea X una curva lisa de género g se tiene:

$\mathrm{Aut}(X) \cong \mathrm{Bir}(X)$

$\mathrm{Aut}(X)$ es finito y $\mid \mathrm{Aut}(X) \mid \leq 84(g-1)$ (Hurwitz).

Además si φ es un automorfismo de orden primo $p > g$ entonces $p \leq 2g+1$ o $p = g+1$, cuando estos números sean primos.

$\mathrm{Pic}(X)$ no es un grupo discreto.

Sea X una curva proyectiva lisa de género g, para cada divisor $D \in \mathrm{Pic}(X)$ se tiene $D = \sum n_i p_i$ y el grado de D es $\deg(D) = \sum n_i$ determina $\deg : \mathrm{Pic}(X) \to \mathbb{Z}$. Se denota por $\ker(\deg) = \mathrm{Pic}^0(X)$ a los divisores de grado 0.

De la sucesión exacta

$$\{0\} \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}^* \to \{0\}$$

se tiene:

$$\to H^1(X,\mathbb{Z}) \to H^1(X,\mathcal{O}) \to H^1(X,\mathcal{O}^*) \to H^2(X,\mathbb{Z}) \to H^2(X,\mathbb{Z})$$

como $\mathrm{Pic}(X)$ puede ser identificado a $H^1(X,\mathcal{O}^*)$ y $H^2(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ la aplicación $\deg : \mathrm{Pic}(X) \to \mathbb{Z}$ puede ser identificada con la aplicación $c_1 : H^1(X,\mathcal{O}^*) \to H^2(X,\mathbb{Z})$ entonces $\mathrm{Pic}^0(X) \cong H^1(X,\mathcal{O})/H^1(X,\mathbb{Z})$ es una variedad abeliana. Si $g > 0$, $\mathrm{Pic}(X)$ no es un grupo discreto.

La cohomología permite asociar a X un nuevo objeto la variedad jacobiana $\mathcal{J}(X)$.

Para los números de Betti se tiene: $b_0 = 1$, $b_1 = 2g$ y $b_2 = 1$.

Para la cohomología se tiene: $H^1(X, \mathbb{C}) = H^0(X, \Omega^1) \oplus H^1(X, \Omega^0)$ donde $\dim H^0(X, \Omega^1) = \dim H^1(X, \Omega^0) = g$. Sea $j : H^1(X, \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^1(X, \mathbb{C})$ la inclusión entonces $\mathcal{J}(X) = (H^0(X, \Omega^1))^*/j(H^1(X, \mathbb{Z}))$ es un toro complejo g-dimensional, el cual admite una polarización principal H inducida por la forma de intersección en la curva. El par $(\mathcal{J}(X), H)$ es una variedad abeliana principalmente polarizada de dimensión g, llamada la jacobiana de la curva X.

Cada $\varphi \in \mathrm{Aut}(X)$ induce aplicaciones $\varphi_h : H^1(X, \mathbb{Z}) \to H^1(X, \mathbb{Z})$ y $\varphi^c : H^0(X, \Omega^1) \to H^0(X, \Omega^1)$ que preservan la polarización, por lo tanto induce un automorfismo $\overline{\varphi}$ en la jacobiana $(\mathcal{J}(X), H)$.

Los automorfismos de una v.ap.p forman un grupo finito

La clase canónica permite obtener un realización proyectiva.

Sea X curva de género g, K el divisor canónico y D un divisor (Riemann-Roch):

$$l(D) - l(K - D) = \deg D + 1 - g$$

$l(K) = \dim H^0(X, K) = g$ y $\deg K = 2g - 2$

Si X no es hiperelíptica K determina una incrustación canónica $\Phi_K : X \to \mathbb{P}_{g-1}$. El modelo canónico $\Phi_K(X) \subset \mathbb{P}_{g-1}$ es llamado la curva canónica.

3. Curvas nodales

Una curva X es una reunión finita y conexa de curvas reducidas e irreducibles, X es nodal o preestable si tiene solamente puntos dobles como singularidades. En este caso se puede ver que $\mathrm{Aut}(X)$ no es necesariamente finito.

$$X = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{P}_2 / x_0 x_1 x_2 = 0\}$$

es una curva nodal y $\mathrm{Aut}(X)$ es un grupo algebraico 2-dimensional. Si $G_0 = \{\mathrm{diag}(a, b, c)/a, b, c \in \mathbb{C} - \{0\}\}$ entonces: $\mathrm{Aut}(X)$ es una extensión de G_0 por el grupo simétrico $\mathfrak{S}_3$.

Sea X una curva nodal, si cada componente racional X_i de X corta al resto de la curva en al menos 3 puntos entonces X es una curva estable. Si X es una curva estable entonces $\mathrm{Aut}(X)$ es un grupo finito.

Si $f : \overline{X} \to X$ es la normalización y $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n$ son puntos de $\overline{X}$ tales que $z_i = f(x_i) = f(y_i)$ $1 \leq i \leq n$ son puntos dobles de X. Denotamos ω_X el haz cuyas secciones son 1-formas η regulares en $\overline{X}$ excepto por polos simples en los x_i e y_i y con $\mathrm{Res}_{x_i}(\eta) + \mathrm{Res}_{y_i}(\eta) = 0$.

De un resultado de Deligne-Mumford cada curva estable X de género g puede incrustarse en $\mathbb{P}_{5g-6}$ utilizando las secciones de $\omega_X^{\otimes 3}$ [11]. Entonces $\mathrm{Aut}(X)$ es un subgrupo algebraico finito de $PGL(5g-5, \mathbb{C})$.

El concepto de superficies de Riemann con nodos es introducido por Bers [9], es equivalente al concepto de curvas estables (sobre $\mathbb{C}$) y hay relaciones y analogías interesantes con la geometría hiperbólica.

4. Superficies

Dimensión de Kodaira

Sea X una superficie proyectiva, K_X su clase canónica y ω_X el haz canónico. Se denota por $P_n = \dim H^0(X, \mathcal{O}(nK)) = \dim H^0(X, \mathcal{O}(\omega_X^{\otimes n}))$. El anillo graduado $R(K_X) = \oplus_{n \geq 1} H^0(X, \mathcal{O}(nK))$ se llama el anillo canónico de la superficie. El haz $\omega_X^{\otimes n}$ (el sistema lineal de divisores) determina una aplicación $\Phi_{nK_X} : X \to \mathbb{P}_{P_n - 1}$.

La dimensión proyectiva de $R(K_X)$ es llamada la dimensión de Kodaira de X y denotada por $\kappa(X)$, se puede también interpretar como la dimensión de la imagen de Φ_{nK_X} para n grande o el menor entero $\kappa(X)$ tal que la sucesión $\frac{P_n}{n^{\kappa(X)}}$ es acotada. Para una superficie se tiene $\kappa(X) \in \{-1, 0, 1, 2\}$. Una superficie proyectiva X es de tipo general si $\kappa(X) = 2$.

El teorema

Proposition 4.1. *Sea X una superficie proyectiva de tipo general entonces $\mid Aut(X) \mid < \infty$.*

La aplicación $\Phi_{nK_X} : X \to \mathbb{P}_{P_n - 1}$ es $\mathrm{Aut}(X)$-invariante. Si denotamos por $P_n - 1 = N$ y $\Phi_{nK_X}(X) = Z$ entonces $\mathrm{Aut}(X)$ se identifica con $G = \{\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^N) / \varphi(I_X) = I_X\}$ el cual es un subgrupo algebraico de $PGL(N, \mathbb{C})$.

Si G tiene dimensión positiva entonces contiene al menos un subgrupo 1-dimensional H y de un teorema de Rosenlicht [15] se tiene que $Z \cong \mathbb{P}^1 \times Z/H$ y X sería reglada, lo cual es absurdo.

Ya más adelante veremos que $\mid \mathrm{Aut}(X) \mid < \infty$ no implica que X sea de tipo general.

Algunos ejemplos

Algunos ejemplos de superficies de tipo general con grupo de automorfismos, "eventualmente" describibles.

Sea X una hipersuperficie lisa de grado 3 de $\mathbb{P}_4$, la variedad de rectas de $\mathbb{P}_4$ contenidas en X, denotada por $F(X)$ es una variedad 2-dimensional de tipo general llamada la superficie de Fano [10].

Cualquier superficie lisa de $\mathbb{P}_3$ de grado al menos 5 es una superficie de tipo general.

Sean C_1 y C_2 dos curvas de géneros g_1 y g_2 respectivamente y un grupo G operando en C_1 y C_2. Si $\mid G \mid= (g_1-1)(g_2-1)$, G opera en $\widetilde{S} = C_1 \times C_2$ sin puntos fijos y C_1/G y C_2/G son curvas racionales entonces el cociente $\widetilde{S}/G = S$ es una superficie de tipo general llamada una superficie de Beauville. Notar que $p_g = 0$ y $q = 0$ [1].

5. Hipersuperficies

Denotaremos por X_n^d una hipersuperficie lisa de grado d de $\mathbb{P}_{n+1}$, consideramos $n \geq 2$ y $d \geq 3$. Se tiene el siguente resultado de Matsumura y Monsky [16]:

El teorema de Matsumura y Monsky

Proposition 5.1. *Para cada $n \geq 2$ y $d \geq 3$ y $(n, d) \neq (2, 4)$ se tiene: $Aut(X_n^d)$ es finito y $Aut(X_n^d) = Lin(X_n^d)$*

Se tiene lo siguentes resultados de Liendo, A y V.G.A [13].

Proposition 5.2. *Para cada $n \geq 2$ y $d \geq 3$ y $(n, d) \neq (2, 4)$ se tiene: Un número primo p es el orden de un automorfismo de X_n^d si y solamente si p divide a $d-1$ o existe $l \in \{1, ..., n+2\}$ tal $(1-d)^l \equiv 1 \bmod p$.*

Proposition 5.3. *Para cada $n \geq 2$ y $d \geq 3$ y $(n, d) \neq (2, 4)$ se tiene: Si un número primo p es el orden de un automorfismo de X_n^d entonces $p < (d-1)^{n+1}$.*

Asi por ejemplo para X_2^3 el primo maximal es $p = 5$, para X_3^3 el primo maximal es $p = 11$ y para X_3^4 el primo maximal es $p = 61$.

6. Superficie cúbica lisa

Sea X_2^3 una hipersuperficie lisa de grado 3 de $\mathbb{P}_3$ es conocido que ella puede ser obtenida como el estallido de $\sum = \{p_1, p_2, ..., p_6\}$ puntos de $\mathbb{P}_2$ en posición general.

Sea S la superficie obtenida por el estallido de $\sum$ en $\mathbb{P}_2$, $\pi : S \to \mathbb{P}_2$

(1) $\mathrm{Pic}(S) \cong \mathbb{Z}^7$, generado por l y $e_1, ..., e_6$, donde $e_1, ..., e_6$ son las clases de equivalencia lineal de las 6 rectas excepcionales $E_1, ..., E_6$.
(2) $l^2 = 1$, $e_i^2 = -1$, $l \cdot e_i = 0$ y $e_i \cdot e_j = 0$ para $i \neq j$.
(3) La clase canónica $K_S = -3l + \sum_{i=1}^{e} e_i$.

Sea D el sistema lineal de cúbicas planas pasando por los 6 puntos de $\sum$ entonces consideramos $\widetilde{D}$ en S, se tiene $\dim(\widetilde{D}) = 10$ y el determina una aplicación $\Phi_{\widetilde{D}} : S \to \mathbb{P}_3$ como $\widetilde{D} =\mid \pi^*(3l) - E_1 - ... - E_6 \mid$ el grado de $\Phi_{\widetilde{D}}(S)$ en $\mathbb{P}_3$ es $9-6$. Se puede probar que el triple $(\mathrm{Pic}(S), K_S, \dot{})$ es isomorfo al sistema de raices E_6 [6]. Cada automorfismo de X_2^3 es un isomorfismo de E_6 que preserva la base canónica, entonces $\mathrm{Aut}(X_2^3)$ se inyecta en el grupo de Weyl $W(E_6)$. Tenemos una superficie X_2^3 que no es de tipo general con $\mathrm{Aut}(X_2^3)$ finito.

Para el orden del grupo de Weyl se tiene $\mid W(E_6) \mid= 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$ [2].

Se puede utilizar una cota superior más general de Andreotti [8]:

Si $X \subset \mathbb{P}_N$ es la única componente irreducible de dimensión máxima de la intersección de hipersuperficies de grado $\leq m$ entonces $\mid \mathrm{Lin}(X) \mid \leq m^{(N+1)^2}$.

En nuestro caso $\mathrm{Aut}(X_2^3) \leq 3^{16} = 3^4 \cdot 3^7 \cdot 3^5$

El grupo más grande que aparece es el grupo de automorfismos de la superficie cúbica de Fermat:

$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$$

cuyo orden es $2^3 \cdot 3^4$.

7. Sólido cuártico y racionalidad

Sea X_3^4 una hipersuperficie lisa de grado 4 de $\mathbb{P}_4$, para X_3^4 se tiene un notable resultado de Iskovskikh y Manin [14].

$\mathrm{Bir}(X_3^4) = \mathrm{Aut}(X_3^4)$

Este resultado implica que X_3^4 no es racional (birracional a $\mathbb{P}_3$).

Los primos admisibles para $\mathrm{Aut}(X_3^4)$ son $\{2, 3, 5, 7, 61\}$

Se tiene de A.L.R y V.G.A [13].

Proposition 7.1. *Una hipersuperficie lisa X_n^d admite un automorfismo de orden primo $p > (d-1)^n$ si y solamente si es isomorfa a la hypersuperficie de Klein, $n = 2$ o $n + 2$ es primo y $p = \Phi_{n+2}(1 - d)$.*

Para X_3^4,

$$n+2=5 \qquad 61>(4-1)^3=27$$

$$\Phi_5(-3)=(-3)^4+(-3)^3+(-3)^2+(-3)^1+1=91-30=61$$

entonces si X_3^4 admite un automorfismo de orden 61 ella es isomorfa a la hipersuperficie de Klein:

$$x_0^3x_1+x_1^3x_2+x_2^3x_3+x_3^3x_4+x_4^3x_0=0$$

el automorfismo φ se realiza con una matriz diagonal

$$\varphi=\mathrm{diag}\{\zeta^1,\zeta^{58},\zeta^9,\zeta^{34},\zeta^{20}\}$$

La característica de Euler de X_n^d esta dada por

$$\chi(X_n^d)=n+2+\frac{(1-d)^{n+2}-1}{d}$$

vale la pena notar que:

$$\chi(X_n^d)=d[\chi(\mathbb{P}_n)-\chi(X_{n-1}^d)]+\chi(X_{n-1}^d)$$

donde $\chi(\mathbb{P}_n)=n+1$ y $\chi(X_1^d)=3d-d^2$.

Por ejemplo la hipersuperficie $x_0^d+x_1^d+...+x_n^d+x_{n+1}^d=0$ de $\mathbb{P}_{n+1}$ puede realizarse como un revestimiento de grado d de $\mathbb{P}_n$, ramificado a lo largo de la hipersuperficie $x_0^d+x_1^d+...+x_n^d=0$ de $\mathbb{P}_n$.

En nuestro caso tendremos que $\chi(X_3^4)=-56$, por otra parte del teorema de la sección hiperplana de Lefschetz y de la dualidad de Poincaré se tiene que los numeros de Betti para X_3^4 son $b_0=b_2=b_4=b_6=1$ y $b_1=b_5=0$ de donde $4-b_3=-56$, entonces $\dim_{\mathbb{Z}}H^3(X_3^4,\mathbb{Z})=60$

Para la cohomología de $H^2(X_3^4,\mathbb{C})$

$$H^2(X_3^4,\mathbb{C})=H^0(X_3^4,\Omega^3)\oplus H^1(X_3^4,\Omega^2)\oplus H^2(X_3^4,\Omega^1)\oplus H^3(X_3^4,\Omega^0)$$

Como $\Omega^3_{X_n^d}=\omega_{X_n^d}=\mathcal{O}_{X_n^d}(d-(n+1))$, $H^0X_3^4,\Omega^3)=\overline{H^3X_3^4,\Omega^0)}=\{0\}$.

Supongamos que X_n^d esta dada por una forma F de grado d en las indeterminadas $x_0,...,x_{n+2}$, sea $S^l=H^0(\mathbb{P}_{n+1},\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{n+1}}(l))$ y $S=\oplus_l S^l$. Sea $J_F=\oplus_l J_F^l$ el ideal jacobiano homogéneo de F generado por las derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ y $R_F^l=S^l/J_F^l$ la l-ésima componente del anillo jacobiano $R_F=S/J_F$. Se tiene [7]:

$$H^{n+1-r,r-1}(X_n^d)=R_F^{rd-n-2}$$

Si queremos calcular una base de $H^1(X_3^4, \Omega^2)$ debemos tener $n = 3$, $r = 2$ y $d = 4$ entonces

$$H^{2,1}(X_3^4) = R_F^3$$

como el espectro de una transformación lineal es independiente de la base, elejimos

$$F = x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$$

tendremos $R_F^3 = S^3((\mathbb{C}^5)^*)/(x_0^3 + ... + x_1^3)$

Entonces una base para $H^{2,1}(X_3^4, \mathbb{C})$ es

$$\{x_i x_j x_k \in S^3(V^*) \mid 0 \leq i \leq j \leq k \leq 4, \;\; i \neq j \neq k\}$$

La jacobiana intermedia $\mathcal{J}(X_3^4)$ es una v.a.p.p de dimensión 30. Para el espacio tangente $T_0\mathcal{J}(X_3^4) = H^{1,2}(X_3^4) = H^2(X_3^4, \Omega^1)$.

Se considera la aplicación inducida $\widetilde{\varphi} : H^{1,2} \to H^{1,2}$, para su espectro spec$(\widetilde{\varphi}) = C$ se tiene: $C \cap \overline{C} = \emptyset$ y $C \cup \overline{C} = \mathbb{F}_{61}^*$ y entonces es una v.a.p.p con multiplicacion compleja y es entonces una componente 0-dimensional del lugar singular del espacio de moduli de v.a.p.p. de dimensión 30 [12]. Se puede demostrar que $(\mathcal{J}(X_3^4), H)$ esta contenido en otra componente lugar singular, por lo tanto no es un punto aislado [12], [13].

References

[1] Beauville, A. *Surfaces Algébriques Complexes*, Astérisque , **54**, Société Mathématique de France (1978).

[2] Bourbaki, N. *Groupes et Algèbres de Lie,Chap 4,5 et 6* Masson , Paris (1981).

[3] Farkas, H. M. and Kra, I. *Riemann Surfaces*, Springer- Verlag, new York (1980).

[4] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry* ,Graduate Texts in Mathematics, **52**, Springer Verlag (1977).

[5] Humprhreys, J.E. *Linear Algebraic Groups* , Graduate Texts in Mathematics, **21**, Springer Verlag (1998).

[6] Manin, I. Y. *Cubic Forms* , North-Holland Mathematical Library, Amsterdam (1974).

[7] Voisin, C. *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe* , Cours Spécialisés, Société Mathématique de France (2002).

[8] Andreotti, A. *Sopra le superficie che posseggno transformazioni birrationali in se*, Rend. Mat. e Appl. **9**, 255-279, 1950.

[9] Bers, L. *On spaces of Riemann surfaces with nodes* Bulletin of the AMS. **80, Number 6** , 1219-1222, 1974.

[10] Clemens, H. and Griffiths, P. *The intermediate Jacobian of a cubic threefolds* Ann. of Maths **95** , 281-356, 1972.

[11] Deligne, P. and Mumford, D. *The irreducibility of the space of curves of a given genus* Publications Mathématiques de L'I.H.E.S. **36** , 75-109, 1965.

[12] González-Aguilera, V., Munoz-Porras, J.M and Zamora, A. G. *On the* 0-*dimensional irreducible components of the singular locus of* $\mathcal{A}_g$ Archiv der Mathematik. **84** , 298-303, 2005.
[13] González-Aguilera, and Liendo, A. *On the order of an automorphisms of a smooth hypersurface* ArXiv: 1102.3443v2 [math.A.G], 22 Feb 2011.
[14] Iskovskikh, A. V. and Manin, I. Y. *Three dimensional quartics and a counterexample to the Luroth problem* Math. Sb. **86** , 140-166, 1971; English trans., Math. USSR-Sb. **15**, 141-166, 1971.
[15] Rosenlicht, M. *Some basic theorems on algebraic groups* Amer. J. Math. **78** , 401-433, 1956.
[16] Matsumura, P. and Monsky, P. *On the automorphisms of hypersurfaces*, Journal of Maths. Kyoto Univ. **3**, (1964),347-361.

Departamento de Matemáticas, Universidad Técnica Federico Santa María, Casilla 110-V, Valparaíso, CHILE.

E-mail address: victor.gonzalez@usm.cl