Funciones Elípticas

Daniela Vásquez Latorre

Junio de 2009

Sabemos que las funciones meromorfas de la esfera son las funciones racionales, es decir, funciones de la forma $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, donde $p(z)$ y $q(z)$ son polinomios con coeficientes complejos y $q(z)$ no es el polinomio nulo. Además, las funciones racionales forman un cuerpo que se denota por $\mathbb{C}(z)$. Ahora estamos interesados en las funciones meromorfas de otra superficie compacta, el Toro. Estas funciones son llamadas funciones elípticas, las cuales provienen de manera natural, de funciones meromorfas y doblemente periódicas en $\mathbb{C}$.

A continuación nos referiremos a las funciones doblemente periódicas en $\mathbb{C}$ y algunas de sus propiedades. Posteriormente trataremos sobre la función $\wp$ de Weierstrass y mostraremos que las funciones meromorfas del toro son un cuerpo, que corresponden al subcuerpo $\mathbb{C}(\wp,\, \wp')$ de $M(\mathbb{C})$, donde $M(\mathbb{C})$ es el conjunto de todas las funciones meromorfas en $\mathbb{C}$, que es un cuerpo.

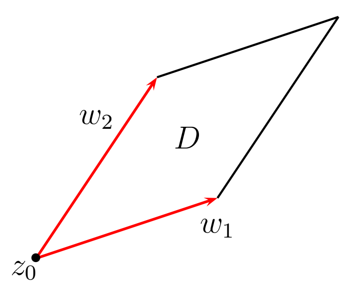
1. Funciones doblemente periódicas

Un reticulado en $\mathbb{C}$ es un subgrupo de $\mathbb{C}$, generado por dos números complejos $\mathbb{R}$-linealmente independientes.

Ahora bien, $\{\omega_1, \omega_2\} \subset \mathbb{C}$ son una base para el reticulado Λ en $\mathbb{C}$, si son $\mathbb{R}$-linealmente independientes y

$$\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \{a\omega_1 + b\omega_2 \,/ a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Sea D el interior de un paralelogramo con vértices en z_0, $z_0 + \omega_1$, $z_0 + \omega_2$ y $z_0 + \omega_1 + \omega_2$, llamaremos a D *dominio fundamental* ó *paralelogramo periodo* para Λ. Usualmente escogemos z_0 de manera que 0 pertenezca a D.



Nuestra propósito es definir una función en $\mathbb{C}/\Lambda$, para eso utilizaremos una función $f : \mathbb{C} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ que cumpla

$$f(z + \omega) = f(z) \quad \forall \omega \in \Lambda. \tag{1}$$

Sea f una función en $\mathbb{C}$ que satisface (1), es claro que si $\{\omega_1, \omega_2\}$ es una base para Λ, f satisface

$$f(z + \omega_1) = f(z) \quad y \quad f(z + \omega_2) = f(z). \tag{2}$$

Ahora, supongamos que f satisface (2). Sea $\omega \in \Lambda$, luego existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que $\omega = a\omega_1 + b\omega_2$. Si $a > 0$ se tiene que

$$f(z + a\omega_1) = f(z + (a-1)\omega_1 + \omega_1) = f(z + (a-1)\omega_1) = ... = f(z + (a-a)\omega_1) = f(z).$$

Si $a < 0$ se cumple que

$$f(z + a\omega_1) = f(z + a\omega_1 + \omega_1) = f(z + (a+1)\omega_1) = ... = f(z + (\underbrace{a + |a}_{0}|)\omega_1) = f(z).$$

De igual manera se prueba que $f(z + b\omega_2) = f(z)$. Por lo tanto $f(z + a\omega_1 + b\omega_2) = f(z)$. Así (1) es equivalente con (2), y por esta razón las funciones que satisfacen (1) se dicen *Doblemente Periódicas.*

Definición 1.1. *Una función meromorfa $f : \mathbb{C} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es elíptica con respecto al reticulado $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ si f es doblemente periódica con respecto a Λ.*

Ahora bien, si f es una función elíptica con respecto a Λ, entonces podemos considerar f como una función $f : T \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$, donde T es el toro $T = \mathbb{C}/\Lambda$.

Hasta el momento, al parecer las únicas funciones elípticas que encontramos son las funciones constantes, y es un problema substancial la construcción de funciones elípticas no constantes. Antes de hacer esto, estudiaremos algunas propiedades generales de funciones elípticas.

Proposición 1.1. *Si f es una función elíptica en $\mathbb{C}$ analítica, entonces f es constante.*

Demostración: Sea D un dominio fundamental para Λ. Como f es doblemente periódica entonces $f(\mathbb{C}) = f(\overline{D})$. Ya que $\overline{D}$ es compacto y f analítica, en particular continua, se tiene que $f(\overline{D})$ es compacto en $\mathbb{C}$. Así f es acotada, luego por el teorema de Liouville, f es constante.

Proposición 1.2. *Sea f una función elíptica en $\mathbb{C}$, no identicamente cero, para un reticulado Λ. Sea D el dominio fundamental para Λ tal que f no tiene ceros ni polos en ∂D. Entonces*

1. $\sum_{p \in D} Res_p(f) = 0$
2. $\sum_{p \in D} \mathtt{ord}_p(f) = 0$
3. $\sum_{p \in D} \mathtt{ord}_p(f) \cdot p \equiv 0 \,\mathtt{mod}\, \Lambda$

Demostración: (a) Esta suma es sobre los puntos de D donde f tiene un polo.
Por el teorema de los Residuos sabemos que

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{p \in D} Res_p(f).$$

Como $f(z+\omega_1) = f(z)$ y $f(z+\omega_2) = f(z)$ entonces las integrales de los lados opuestos de ∂D se cancelan, así $\int_{\partial D} f(z)dz = 0$ y por tanto $\sum_{p\in D} Res_p(f) = 0$.

Si f es analítica en p y este no es un cero de f, entonces $\texttt{ord}_p(f) = 0$, por tanto las sumas de (b) y (c) son sobre los ceros y polos de f en D. Por otra parte, como $\overline{D}$ es un compacto, entonces hay una cantidad finita de ceros y polos en D, y por tanto estas sumas son finitas.

(b) Consideremos la función meromorfa $g(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$. Ya que $f(z+\omega) = f(z)$ y $f'(z+\omega) = f'(z)$ para todo $\omega \in \Lambda$, entonces $g(z+\omega) = g(z)$, así g es doblemente periódica.

Si p es un cero de orden n de f, entonces $f(z) = (z-p)^n h(z)$ en una vecindad de p, donde h es una función analítica y $h(p) \neq 0$. Así

$$f'(z) = n(z-p)^{n-1}h(z) + (z-p)^n h'(z)$$

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{(z-p)} + \frac{h'(z)}{h(z)}$$

Luego $Res_p(g) = n = \texttt{ord}_p(f)$.

Ahora, si p es un polo f de orden n, entonces $f(z) = \frac{1}{(z-p)^n}h(z)$ en una vecindad de p, donde h es una función analítica y $h(p) \neq 0$. Así

$$f'(z) = \frac{-n}{(z-p)^{n+1}}h(z) + \frac{1}{(z-p)^n}h'(z)$$

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-n}{(z-p)} + \frac{h'(z)}{h(z)}$$

Luego $Res_p(g) = -n = \texttt{ord}_p(f)$.

Así $\sum_{p\in D} \texttt{ord}_p(f) = \sum_{p\in D} Res_p(g) = 0$ por (a).

(c) Consideremos la función meromorfa $g(z) = \dfrac{zf'(z)}{f(z)}$. Los polos de g son los ceros y polos de f.

Si p es un cero de orden n de f, entonces $f(z) = (z-p)^n h(z)$ en una vecindad de p, donde

h es una función analítica y $h(p) \neq 0$. Así

$$f'(z) = n(z-p)^{n-1}h(z) + (z-p)^n h'(z)$$

$$\begin{aligned} g(z) &= (z-p+p)\left(\frac{n}{z-p} + \frac{h'(z)}{h(z)}\right) \\ &= \frac{np}{z-p} + n + p\frac{h'(z)}{h(z)} + (z-p)\frac{h'(z)}{h(z)} \end{aligned}$$

Por lo tanto $Res_p(g) = np = \mathtt{ord}_p(f) \cdot p$

Ahora, si p es un polo f de orden n, entonces $f(z) = \frac{1}{(z-p)^n}h(z)$ en una vecindad de p, donde h es una función analítica y $h(p) \neq 0$.

$$f'(z) = \frac{-n}{(z-p)^{n+1}}h(z) + \frac{1}{(z-p)^n}h'(z)$$

$$\begin{aligned} g(z) &= (z-p+p)\left(\frac{-n}{z-p} + \frac{h'(z)}{h(z)}\right) \\ &= \frac{-np}{z-p} - n + p\frac{h'(z)}{h(z)} + (z-p)\frac{h'(z)}{h(z)} \end{aligned}$$

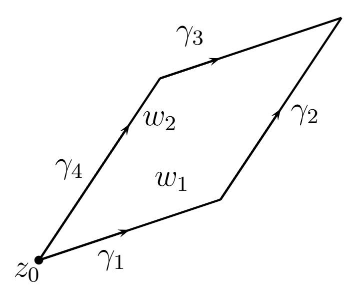
Luego $Res_p(g) = -np = \mathtt{ord}_p(f) \cdot p$.

Así $\sum_{p \in D} Res_p(g) = \sum_{p \in D} \mathtt{ord}_p(f) \cdot p$.

Por otra parte

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} g(z)dz = \sum_{p \in D} Res_p(g) = \sum_{p \in D} \mathtt{ord}_p(f) \cdot p$$

Consideremos una parametrización de ∂D dada por $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3^{-1} * \gamma_4^{-1}$



Así

$$\int_{\partial D} g(z)dz = \int_{\gamma_1} g(z)dz + \int_{\gamma_2} g(z)dz - \int_{\gamma_3} g(z)dz - \int_{\gamma_4} g(z)dz$$

Ahora

$$\int_{\gamma_2} g(z)dz = \int_{\gamma_2} \frac{zf'(z)}{f(z)}dz = \int_{\gamma_4} (z+\omega_1)\frac{f'(z+\omega_1)}{f(z+\omega_1)}dz$$
$$= \int_{\gamma_4} (z+\omega_1)\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$
$$= \int_{\gamma_4} \frac{zf'(z)}{f(z)}dz + \omega_1 \int_{\gamma_4} \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

Luego

$$\int_{\gamma_2} g(z)dz - \int_{\gamma_4} g(z)dz = \omega_1 \int_{\gamma_4} \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

Considere el camino $\delta_4(t) = (f \circ \gamma_4)(t)$, con $t \in [0,1]$. Así $\delta_4(0) = f(\gamma_4(0))$ y $\delta_4(1) = f(\gamma_4(1))$. Pero $\gamma_4(1) = \gamma_4(0) + \omega_2$. Luego $f(\gamma_4(1)) = f(\gamma_4(0)+\omega_2) = f(\gamma_4(0))$. Por tanto $\delta_4(1) = \delta_4(0)$ y por ende δ_4 es un camino cerrado.

Ahora, si $u = f(z)$ entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_4} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_4} \frac{1}{u}du \in \mathbb{Z}$$

pues es el número de vueltas de δ_4 alrededor de $u_0 = 0$.

Por lo tanto

$$\int_{\gamma_2} g(z)dz - \int_{\gamma_4} g(z)dz = \omega_1 2\pi i n_1$$

donde $n_1 \in \mathbb{Z}$.

De la manera analoga se prueba que

$$\int_{\gamma_1} g(z)dz - \int_{\gamma_3} g(z)dz = \omega_2 2\pi i n_2$$

donde $n_2 \in \mathbb{Z}$.

Por lo anterior se tiene que

$$\sum_{p\in D} \mathtt{ord}_p(f)\cdot p = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} g(z)dz = \omega_1 n_1 + \omega_2 n_2 \in \Lambda. \square$$

Corolario 1.1. *Sea f una función elíptica en $\mathbb{C}$, no constante, entonces f tiene al menos dos polos (o uno de orden 2).*

Demostración: Sea D un dominio fundamental para Λ. Si f es analítica, entonces por proposición 1.1 f es constante, lo cual es una contradicción. Por lo tanto f tiene al menos un polo. Si f tiene un único polo y este es simple, entonces $\sum_{p\in D} Res_p(f) \neq 0$ lo que contradice la parte (a) de la proposición anterior. Por lo tanto f tiene al menos un polo de orden 2 o un polo doble.

2. La función $\wp$ de Weierstrass

Sea $\{\omega_1, \omega_2\} \subset \mathbb{C}$ una base para el reticulado Λ en $\mathbb{C}$ y sea D un dominio fundamental para Λ. Queremos construir funciones f, no constantes, las cuales sean elípticas con respecto al reticulado Λ. Por lo visto en la sección anterior, sabemos que f no puede ser analítica y que además debe tener al menos dos polos o uno de orden dos en D. En esta sección presentaremos la función $\wp$ de Weierstrass, cual es elíptica con respecto a Λ y que tiene solo un polo de orden 2 en D.

Cuando un grupo finito G actúa sobre un conjunto S, nos resulta fácil construir funciones invariantes bajo la acción de G, por ejemplo sea $f : S \longrightarrow \mathbb{C}$ una función y definamos $F : S \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$F(s) = \sum_{g\in G} f(gs).$$

Sea $g' \in G$ entonces

$$F(g's) = \sum_{g\in G} f(g(g's)) = \sum_{g\in G} f((gg')s) = F(s)$$

puesto que si g recorre todo G también lo hace gg'. Así F es G invariante. Ahora que pasa cuando G es infinito, tenemos que verificar que la serie converge. Aún mas, para intercambiar el orden de los sumandos necesitamos al menos convergencia absoluta.

Considere φ una función meromorfa en $\mathbb{C}$ y sea

$$\Phi(z) = \sum_{\omega\in\Lambda} \varphi(z+\omega).$$

Si la serie es absolutamente convergente tenemos que Φ es doblemente periódica, puesto que para $\omega_0 \in \Lambda$ se tiene que

$$\Phi(z+\omega_0) = \sum_{\omega\in\Lambda} \varphi(z+\omega_0+\omega) = \sum_{\omega\in\Lambda} \varphi(z+\omega)$$

esto debido a que si ω recorre todo Λ, entonces $\omega_0 + \omega$ tambien recorre todo Λ.

Otra dificultad que aparece es probar que Φ es meromorfa. Ya tenemos que φ es meromorfa, entonces si la serie que define a Φ es uniformente convergente tendríamos que Φ es meromorfa y además esto permite derivar la serie término a término.

Por lo anterior nos interesa que la serie sea normalmente convergente, ya que convergencia normal implica convergencia absoluta y uniforme.

Recordemos el concepto de convergencia normal. Sea D un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones analíticas en D. Diremos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge normalmente en $A \subset D$, si existe una sucesión de constantes positivas $\{M_n\}$ tal que

i) $|f_n(z)| \leq M_n$ para todo $z \in A$ y todo n

ii) la serie $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge.

Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f(z)$ converge normalmente en $A \subset D$, entonces converge absolutamente y uniformemente en A.

Considere $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones meromorfas en D, entonces diremos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge normalmente en $A \subset D$ si, después de retirar un número finito de terminos f_n, la serie se transforma en una serie de funciones analíticas que converge normalmente. Ahora, si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge normalmente sobre subconjuntos compactos de D, entonces $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ es una función meromorfa en D y la serie de las derivadas converge normalmente sobre subconjuntos compactos de D y su suma es la derivada de f.

Por tanto si suponemos que $\varphi(z) \to 0$, cuando $|z| \to \infty$, tan rápido de manera que $\sum_{\omega \in \Lambda} \varphi(z + \omega)$ converge normalmente en subconjuntos compactos. Entonces Φ es meromorfa y doblemente periódica con respecto a Λ.

Para probar convergencia normal en las funciones que nos interesan, necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.1. *Sea Λ un reticulado en $\mathbb{C}$, entonces la serie $\sum_{\omega \in \Lambda, \omega \neq 0} \dfrac{1}{|\omega|^3}$ converge.*

Demostración: Sea $\{\omega_1, \omega_2\}$ una base para Λ, así $\Lambda = \{a\omega_1 + b\omega_2 \,/ a, b \in \mathbb{Z}\}$. Para $n \in \mathbb{Z}^+$ considere el paralelogramo

$$P(n) = \{a_1\omega_1 + a_2\omega_2 \,/ a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}, \max(|a_1|, |a_2|) = n\}.$$

Así

$$P(n) \cap \Lambda = \{a_1\omega_1 + a_2\omega_2 \,/ a_1 = \pm n \text{ y } a_2 = [-n, n] \cap \mathbb{Z} \text{ ó } a_2 = \pm n \text{ y } a_1 = (-n, n) \cap \mathbb{Z}\}.$$

Luego en $P(n)$ hay $8n$ puntos de Λ.

Sea $\omega = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 \in P(n) \cap \Lambda$. Sin perdida de generalidad supongamos que $|a_1| = n$, así $a_1 = n$ ó $a_1 = -n$. Si $a_1 = n$ entonces $|\omega| = |n\omega_1 + a_2\omega_2| = n|\omega_1 + \frac{a_2}{n}\omega_2|$, donde $|\frac{a_2}{n}| \leq 1$.

Sea k la menor distancia entre 0 y un punto de $P(1)$, así $|\omega_1 + \frac{a_2}{n}\omega_2| \geq k$ y por tanto $|\omega| \geq nk$. De igual modo se prueba que si $a_1 = -n$, $|\omega| \geq nk$.

Ahora

$$\sum_{\omega\in P(n)\cap\Lambda} \frac{1}{|\omega|^3} \leq \sum_{\omega\in P(n)\cap\Lambda} \frac{1}{n^3k^3} = \frac{8n}{n^3k^3} = \frac{8}{n^2k^3}$$

así

$$\sum_{\omega\in\Lambda,\,\omega\neq 0} \frac{1}{|\omega|^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\omega\in P(n)\cap\Lambda} \frac{1}{|\omega|^3} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^2k^3} = \frac{8}{k^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty. \square$$

Sea Λ un reticulado en $\mathbb{C}$ y D un dominio fundamental para Λ. La función elíptica, no constante, mas simple que podamos tener, es una con un único polo doble en D, así podemos pensar en una función f que tenga en cada punto de Λ un polo doble y no tenga otros polos. Así en una vecindad $U_0 \subseteq D$ de 0,

$$f(z) = \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + h(z)$$

donde h es analítica en U_0, y a_{-2}, $a_{-1} \in \mathbb{C}$, con $a_{-2} \neq 0$.

Considere la función $g(z) = f(z) - f(-z)$. Claramente g es doblemente periódica. Además

$$\begin{aligned} g(z) = f(z) - f(-z) &= \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + h(z) - \Big(\frac{a_{-2}}{z^2} - \frac{a_{-1}}{z} + h(-z)\Big) \\ &= \frac{2a_{-1}}{z} + h(z) - h(-z) \end{aligned}$$

en una vecindad de 0, luego g a lo mas tiene un polo simple en D, por tanto como g es elíptica, entonces es constante. Por otra parte observamos que g es impar, pues

$$g(-z) = f(-z) - f(z) = -(f(z) - f(-z)) = -g(z)$$

luego por ser g constante, se tiene que $g(z) = 0$ y por ende $f(z) = f(-z)$, es decir f es par.

Así si pensamos que $a_{-2} = 1$, tenemos que

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + z^2 k(z)$$

en una vecindad de 0, donde k es analítica en dicha vecindad.

Hay una función que cumple con lo anterior, llamada la función $\wp$ de Weierstrass. Cabe notar que no podemos definirla directamente de la función $1/z^2$ ya que $\sum_{\omega\in\Lambda} \frac{1}{(z+\omega)^2}$ no es normalmente convergente.

Definimos la función de Weierstrass como

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Lambda,\,\omega\neq 0} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

y también definimos la función

$$\wp'(z) = \sum_{\omega\in\Lambda} \frac{-2}{(z-\omega)^3}$$

Mostraremos que estas dos funciones son elípticas en $\mathbb{C}$ y que $\wp' = \frac{d\wp}{dz}$.

Proposición 2.1. *Las series anteriores convergen normalmente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$, además $\wp$ y $\wp'$ son funciones doblemente periódicas y meromorfas en $\mathbb{C}$, donde $\wp' = \frac{d\wp}{dz}$*

Demostración: Consideremos el disco compacto $|z| \leq r$. Sabemos que existe una cantidad finita de elementos $\omega \in \Lambda$ de manera que $|\omega| \leq 2r$.

Sea $\omega \in \Lambda$ tal que $|\omega| \geq 2r$, asi $\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}$ es analítica en $|z| \leq r$. Ahora bien

$$\left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| = \left| \frac{-z^2 + 2\omega z}{\omega^2 (z-\omega)^2} \right| = \left| \frac{z\omega(-\frac{z}{\omega} + 2)}{\omega^4 (\frac{z}{\omega} - 1)^2} \right| = \frac{|z(2 - \frac{z}{\omega})|}{|\omega^3||1 - \frac{z}{\omega}|^2}.$$

Pero $|\omega| \geq 2r \geq 2|z|$, entonces $|\frac{z}{\omega}| \leq \frac{1}{2}$, luego

$$\frac{|z(2 - \frac{z}{\omega})|}{|\omega^3||1 - \frac{z}{\omega}|^2} \leq \frac{r(2 + \frac{1}{2})}{|\omega|^3 (1 - \frac{1}{2})^2} = \frac{\frac{5}{2} r}{|\omega|^3 \frac{1}{4}} = \frac{10r}{|\omega|^3}.$$

Como la serie $\sum_{\omega\in\Lambda} \frac{1}{|\omega|^3}$ converge, por tanto la serie que define a $\wp(z)$ converge normalmente en cada disco compacto $|z| \leq r$. Por tanto $\wp(z)$ es una función meromorfa.

De igual manera, sea $\omega \in \Lambda$ tal que $|\omega| \geq 2r$, así $\frac{-2}{(z-\omega)^3}$ es analítica en $|z| \leq r$. Así

$$\left|\frac{-2}{(z-\omega)^3}\right| = \left|\frac{2}{(\omega-z)^3}\right| = \frac{2}{|\omega|^3|1-\frac{z}{\omega}|^3} \leq \frac{2}{|\omega|^3|1-|\frac{z}{\omega}||^3} \leq \frac{2}{|\omega|^3(\frac{1}{2})^3} = \frac{16}{|\omega|^3}.$$

Nuevamente como la serie $\sum_{\omega\in\Lambda}\frac{1}{|\omega|^3}$ converge, se tiene que la serie que define a $\wp'(z)$ converge normalmente en cada disco compacto $|z| \leq r$. Por tanto $\wp'(z)$ es una función meromorfa.

Ahora sea $\omega_0 \in \Lambda$ entonces

$$\wp'(z+\omega_0) = \sum_{\omega\in\Lambda}\frac{-2}{(z+\omega_0-\omega)^3} = \sum_{\omega\in\Lambda}\frac{-2}{(z-(\omega-\omega_0))^3} = \sum_{\omega\in\Lambda}\frac{-2}{(z-\omega)^3} = \wp'(z)$$

esto último se debe a que la serie converge normalmente y por tanto absolutamente y además si ω recorre todo Λ, entonces $\omega-\omega_0$ también recorre todo Λ. Así $\wp'$ es doblemente periódica.

También es claro que $\wp' = \frac{d\wp}{dz}$. Luego $\wp$ es doblemente periódica pues su derivada es doblemente periódica.$\square$

Considere la función $F : \mathbb{C}-\Lambda \longrightarrow \mathbb{C}^2$ definida por $F(z) = (\wp(z), \wp'(z))$. Mostraremos que esta función parametriza una superficie de $\mathbb{C}^2$ de la forma

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 /\, y^2 = 4x^3 + ax + b\}.$$

Esto nos dice que existe una relación entre $\wp$ y $\wp'$ de la forma $(\wp'(z))^2 = 4(p(z))^3 + a\wp(z) + b$ donde a y b son ciertos números en $\mathbb{C}$

Teorema 2.1. *Sea $\Lambda = \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$ un reticulado en $\mathbb{C}$ y $\wp$ la función de Weierstrass asociada a Λ. Entonces*

$$(\wp'(z))^2 = 4(p(z))^3 + a\wp(z) + b$$

donde

$$a = -60\sum_{\omega\in\Lambda^*}\frac{1}{\omega^4} \quad y \quad b = -140\sum_{\omega\in\Lambda^*}\frac{1}{\omega^6}$$

Antes de probar el teorema, consideremos la siguiente serie

$$\sum_{\omega\in\Lambda\,\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^n}.$$

Sabemos que la función $\rho:\Lambda\longrightarrow\Lambda$ dada por $\rho(\omega)=-\omega$ es de orden 2 y que el único punto fijo por ella es el 0. Luego la orbita de $\omega\neq 0$ es $[\omega]_\rho=\{\omega,\,-\omega\}$, así $\Lambda-\{0\}$ es unión disjunta de estas orbitas, y por tanto si n es impar se tiene que

$$\sum_{\omega\in\Lambda\,\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^n}=0.$$

Probaremos a continuación que si n es par la serie converge.

Lema 2.2. *Sea Λ un reticulado en $\mathbb{C}$ y $k\geq 2$. Entonces la serie*

$$G_{2k}(\Lambda)=\sum_{\omega\in\Lambda,\,\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^{2k}}$$

converge.

Demostración: Sea $\omega\in\Lambda$ tal que $|\omega|>1$. Entonces $|\omega|^{2k}\geq|\omega|^3$ para $k\geq 2$. Luego

$$\left|\sum_{\omega\in\Lambda,\,|\omega|>1}\frac{1}{\omega^{2k}}\right|\leq\sum_{\omega\in\Lambda,\,|\omega|>1}\frac{1}{|\omega|^{2k}}\leq\sum_{\omega\in\Lambda,\,|\omega|>1}\frac{1}{|\omega|^{3}}.$$

Por lema 2.1, tenemos que $\sum_{\omega\in\Lambda,\,|\omega|>1}\frac{1}{|\omega|^3}$ converge, luego $\sum_{\omega\in\Lambda,\,|\omega|>1}\frac{1}{\omega^{2k}}$ converge.

Sabemos que existe una cantidad finita de $\omega\in\Lambda$ tales que $|\omega|\leq 1$, Así

$$\sum_{\omega\in\Lambda,\,\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^{2k}}=\underbrace{\sum_{\omega\in\Lambda^*,\,|\omega|\leq 1}\frac{1}{\omega^{2k}}}_{suma\,finita}+\sum_{\omega\in\Lambda,\,|\omega|>1}\frac{1}{\omega^{2k}}$$

donde $\sum_{\omega\in\Lambda\,|\omega|>1}\frac{1}{\omega^{2k}}$ es convergente. Por lo tanto $\sum_{\omega\in\Lambda,\,\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^{2k}}$ converge. $\square$

Demostración del Teorema 2.1:

Recordemos que para $t\in\mathbb{C}$, con $|t|<1$ tenemos que

$$\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+...$$

luego derivando, obtenemos

$$\frac{1}{(1-t)^2} = 1 + 2t + 3t^2 + 4t^3 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n$$

para $|t| < 1$.

Consideremos $|z| < |\omega|$, con $\omega \in \Lambda^*$, así $\left|\frac{z}{w}\right| < 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
\wp(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Lambda,\,\omega\neq 0}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)\\
&= \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Lambda,\,\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{\left(\frac{z}{\omega}-1\right)^2} - 1\right)\\
&= \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Lambda,\,\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{z^n}{\omega^n} - 1\right)\\
&= \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Lambda,\,\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^2}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\frac{z^n}{\omega^n}\\
&= \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Lambda,\,\omega\neq 0}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\frac{z^n}{\omega^{n+2}}
\end{aligned}$$

intercambiando el orden de las series, obtenemos

$$\begin{aligned}
\wp(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\omega\in\Lambda,\,\omega\neq 0}(n+1)\frac{z^n}{\omega^{n+2}}\\
&= \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left((n+1)z^n\sum_{\omega\in\Lambda,\,\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^{n+2}}\right)
\end{aligned}$$

pero sabemos que si n es impar, $\sum_{\omega\in\Lambda,\,\omega\neq 0}\dfrac{1}{\omega^{n+2}} = 0$. Luego

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left((2k+1)z^{2k}\sum_{\omega\in\Lambda,\,\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^{2k+2}}\right).$$

Por lema 2.2 se tiene que para $k \geq 1$, $\sum_{\omega\in\Lambda,\,\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^{2k+2}}$ converge. Así

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3\left(\sum_{\omega\in\Lambda,\,\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^4}\right)z^2 + 5\left(\sum_{\omega\in\Lambda,\,\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^6}\right)z^4 + 7\left(\sum_{\omega\in\Lambda,\,\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^8}\right)z^6 + ...$$
$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3G_4\,z^2 + 5G_6\,z^4 + 7G_8\,z^6 + ...$$

Luego

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 6G_4\,z + 20G_6\,z^3 + 42G_8\,z^5 + ...$$

Ahora,

$$\begin{aligned}\wp'(z)^2 &= (-\frac{2}{z^3} + 6G_4\,z + 20G_6\,z^3 + ...)(-\frac{2}{z^3} + 6G_4\,z + 20G_6\,z^3 + ...)\\ &= \frac{4}{z^6} - 24G_4\,\frac{1}{z^2} - 80G_6 + ...\end{aligned}$$

también

$$\begin{aligned}\wp(z)^3 &= (\frac{1}{z^2} + 3G_4\,z^2 + 5G_6\,z^4 + ...)(\frac{1}{z^2} + 3G_4\,z^2 + 5G_6\,z^4 + ...)(\frac{1}{z^2} + 3G_4\,z^2 + 5G_6\,z^4 + ...)\\ &= (\frac{1}{z^4} + 6G_4 + 10G_6\,z^2 + ...)(\frac{1}{z^2} + 3G_4\,z^2 + 5G_6\,z^4 + ...)\\ &= \frac{1}{z^6} + 9G_4\,\frac{1}{z^2} + 15G_6 + ...\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 60G_4\wp(z) + 140G_6 &= \left(\frac{4}{z^6} - 24G_4\frac{1}{z^2} - 80G_6 + ...\right) - 4\left(\frac{1}{z^6} + 9G_4\frac{1}{z^2} + 15G_6 + ...\right) +\\ &\quad 60G_4\left(\frac{1}{z^2} + 3G_4\,z^2 + 5G_6\,z^4 + ...\right) + 140G_6\\ &= h(z)\end{aligned}$$

donde $h(z)$ es una función analítica en 0 y $h(0) = 0$. Como $\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 60G_4\wp(z) + 140G_6$ es doblemente periódica, pues $\wp$ y $\wp'$ lo son, y no tiene polos en un dominio fundamental que contiene a 0, entonces por teorema de Liouville, es constante. Pero $h(0) = 0$, luego se tiene que

$$\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 60G_4\wp(z) + 140G_6 = 0$$

y así

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - 60G_4\wp(z) - 140G_6.\square$$

3. El cuerpo de las funciones elípticas

En esta sección mostraremos que toda función elíptica con respecto a Λ es una función racional de $\wp$ y su derivada $\wp'$.

Sea $H(\mathbb{C})$ el conjunto de la funciones analíticas en $\mathbb{C}$ y $M(\mathbb{C})$ el conjunto de las funciones meromorfas en $\mathbb{C}$. Sabemos que $H(\mathbb{C})$ es dominio de integridad y que $M(\mathbb{C})$ es el es cuerpo de fracciones de $H(\mathbb{C})$.

Como $\wp$ y $\wp'$ pertenecen a $M(\mathbb{C})$ entonces $\mathbb{C}(\wp, \wp')$ el cuerpo generado por $\wp$ y $\wp'$, es un subcuerpo de $M(\mathbb{C})$. Además es fácil ver que toda función en $\mathbb{C}(\wp, \wp')$ es meromorfa y doblemente periódica, con respecto a Λ, en $\mathbb{C}$. Mostraremos que toda función f meromorfa y doblemente periódica, con respecto a Λ, en $\mathbb{C}$, puede ser expresada como una función racional de $\wp$ y $\wp'$, es decir, que f pertenece a $\mathbb{C}(\wp, \wp')$.

Proposición 3.1. *El subcuerpo $\mathbb{C}(\wp, \wp')$ de $M(\mathbb{C})$, generado por $\wp$ y $\wp'$, corresponde al conjunto de todas las funciones meromorfas, doblemente periódicas en $\mathbb{C}$.*

Demostración: Sea f una función par, meromorfa y doblemente periódica en $\mathbb{C}$. Mostraremos que f pertenece a $\mathbb{C}(\wp)$.

Como f es par, entonces $f(z) = f(-z)$, luego la k-esima derivada de f cumple que

$$f^{(k)}(z) = (-1)^k f^{(k)}(-z). \tag{3}$$

Por tanto si z_0 es un cero de f de orden m, entonces $-z_0$ es también un cero de orden m de f. De la misma forma si z_0 es un polo de f de orden m, entonces z_0 es un cero de orden m de $\frac{1}{f}$, la cual también es una función par, por tanto $-z_0$ también es un cero de orden m de $\frac{1}{f}$ y por tanto un polo de orden m de f.

Si z_0 es un cero de orden m de f y $z_0 \equiv -z_0 (\mathtt{mod}\, \Lambda)$, entonces $z_0 = -z_0 + \omega$, para algún $\omega \in \Lambda$. Luego como la derivada k-esima de f es también una función doblemente periódica, se tiene que $f^{(k)}(z_0) = f^{(k)}(-z_0 + \omega) = f^{(k)}(-z_0)$. Así

$$f^{(m)}(z_0) = (-1)^m f^{(m)}(-z_0) = (-1)^m f^{(m)}(z_0)$$

y como z_0 es un cero de orden m, entonces $f^{(m)}(z_0) \neq 0$, por lo que se concluye que m es par. De manera similar se puede probar que si z_0 es un polo de orden m de f, entonces m es par.

Para los ceros y polos de f que no están en Λ, elijamos un conjunto de representantes módulo Λ, sabemos que son finitos. Así, sean estos z_1, z_2, ..., z_m, $-z_1$, $-z_2$, ..., $-z_m$, z_{m+1}, z_{m+2}, ..., z_n, de modo que

$$z_i \not\equiv -z_i \,(\texttt{mod}\,\Lambda) \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq m$$

y

$$z_i \equiv -z_i \not\equiv 0 \,(\texttt{mod}\,\Lambda) \quad \text{para} \quad m+1 \leq i \leq n.$$

Sea m_i el orden de f en z_i, entonces sabemos que m_i es par para $i > m$.

Considere la función $\wp(z) - \wp(z_i)$, entonces tenemos que esta función es par meromorfa y doblemente periódica. Además tiene exactamente dos polos en un dominio fundamental para Λ y por tanto debe tener exactamente dos ceros ahí. Cuando $i \leq m$ tiene ceros simples en z_i y en $-z_i$; cuando $i > m$, tiene un cero doble en z_i.

Definamos la función

$$g(z) = \prod_{i=1}^{m} (\wp(z) - \wp(z_i))^{m_i} \cdot \prod_{i=m+1}^{n} (\wp(z) - \wp(z_i))^{m_i/2}$$

Observe que f y g tiene exactamente los mismos ceros y polos en $\mathbb{C} - \Lambda$. Consideremos ahora la función f/g, claramente es meromorfa y doblemente periódica, pero f y g tiene el mismo orden en $z = 0$, así f/g es una función analítica, luego como es doblemente periódica, concluimos que es constante. Por lo tanto existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $f = cg$ y como $cg \in \mathbb{C}(\wp)$, se tiene que $f \in \mathbb{C}(\wp)$.

Suponga que f es una función impar. Observe que $\wp'$ es una función impar ya que

$$\wp'(-z) = \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{-2}{(-z-\omega)^3} = -\sum_{\omega \in \Lambda} \frac{-2}{(z+\omega)^3} = -\sum_{\omega \in \Lambda} \frac{-2}{(z-\omega)^3} = -\wp'(z)$$

Luego $f/\wp'$ es una función par, así $f/\wp' \in \mathbb{C}(\wp)$, por tanto $f \in \wp'\mathbb{C}(\wp)$.

Considere ahora f una función arbitraria, meromorfa y doblemente periódica en $\mathbb{C}$. Sabemos que f se puede descomponer como suma de una función par con una función impar, sea esta descomposición:

$$f(z) = \underbrace{\frac{f(z) + f(-z)}{2}}_{par} + \underbrace{\frac{f(z) - f(-z)}{2}}_{impar}.$$

Claramente $\frac{f(z)+f(-z)}{2}$ y $\frac{f(z)-f(-z)}{2}$ son meromorfas y doblemente periódicas, pues f lo es. Por lo anterior sabemos que $\frac{f(z)+f(-z)}{2}$ pertenece a $\mathbb{C}(\wp)$, pues es una función par. Además $\frac{f(z)-f(-z)}{2} \in \wp'\mathbb{C}(\wp)$ pues es impar. Esto nos dice que si f es una función elíptica en $\mathbb{C}$, para el reticulado Λ, entonces

$$f = R_1(\wp) + \wp' R_2(\wp)$$

donde R_1 y R_2 son funciones racionales. Y así claramente $f \in \mathbb{C}(\wp, \wp')$.

Es claro que toda función de $\mathbb{C}(\wp, \wp')$ es doblemente periódica. Por lo tanto $\mathbb{C}(\wp, \wp')$ es el conjunto de todas las funciones meromorfas y doblemente periódicas, con respecto a Λ, en $\mathbb{C}$. $\square$

Note que usando la ecuación

$$(\wp'(z))^2 = 4(p(z))^3 + a\wp(z) + b$$

donde

$$a = -60 \sum_{\omega \in \Lambda^*} \frac{1}{\omega^4} \quad y \quad b = -140 \sum_{\omega \in \Lambda^*} \frac{1}{\omega^6},$$

podemos escribir toda función racional f de $\wp$ y $\wp'$ de la forma

$$f = R_1(\wp) + \wp' R_2(\wp)$$

donde R_1 y R_2 son funciones racionales, y esto lo hacemos eliminando potencias de $\wp'$; por ejemplo

$$\begin{aligned}
\frac{\wp\wp'}{\wp'+1} &= \frac{\wp\wp'}{\wp'+1} \cdot \frac{\wp'-1}{\wp'-1} \\
&= \frac{\wp\wp'(\wp'-1)}{(\wp')^2-1} \\
&= \frac{\wp(\wp')^2 - \wp\wp'}{(\wp')^2-1} \\
&= \frac{4\wp^4 + a\wp^2 + b\wp - \wp\wp'}{4\wp^3 + a\wp + b - 1} \\
&= \frac{4\wp^4 + a\wp^2 + b\wp}{4\wp^3 + a\wp + b - 1} - \wp' \frac{\wp}{4\wp^3 + a\wp + b - 1}
\end{aligned}$$

Referencias

[1] Milne. J. S. *Elliptic Curves.*

[2] Neto Alcides. *Funções de uma variável complexa*. Projecto Euclides. Impa.

[3] Garetha A. Jones, Singerman David.*Complex Functions.*Cambridge University Press.