Sobre toros complejos

Sebastián Herrero M.

3 de Junio, 2011

1. Morfismos holomorfos entre toros complejos

Sean L, M reticulados en $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}/L$, $\mathbb{C}/M$ los respectivos toros complejos. Queremos estudiar la estructura de los morfismos holomorfos entre $\mathbb{C}/L$ e $\mathbb{C}/M$. Primero debemos recordar algunos conceptos de topología.

1.1. Recuerdo sobre cubrimientos

Definición 1 (Cubrimiento) *Sea X espacio topológico. Un cubrimiento de X es un par $(\tilde{X}, p)$ donde $\tilde{X}$ es espacio topológico, $p : \tilde{X} \to X$ es continua, sobreyectiva y para cada $x \in X$ existe vecindad abierta U de x tal que:*

1. $p^{-1}(U) = \bigcup_j \tilde{U}_j$ *unión disjunta de abiertos* $\tilde{U}_j \subseteq \tilde{X}$

2. $p|_{\tilde{U}_j} : \tilde{U}_j \to U$ *homeomorfismo*

Por ejemplo si $\pi_L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/L$ es la proyección natural, entonces $(\mathbb{C}, \pi_L)$ es cubrimiento de $\mathbb{C}/L$.

Hecho 1: Si $(\tilde{X}, p)$ es cubrimiento de X y $(\tilde{\tilde{X}}, q)$ es cubrimiento de $\tilde{X}$, entonces $(\tilde{\tilde{X}}, q)$ es cubrimiento de X.

Lema 1 *Sean X, Y superficies de Riemann con X compacta y $F : X \to Y$ morfismo holomorfo no constante sin puntos de ramificación. Entonces (X, F) es cubrimiento de Y.*

Demostración del Lema 1: Sabemos que F es continua y sobreyectiva. Si $y \in Y$ entonces:

$$F^{-1}(y) = \{x_1, \cdots, x_N\}\ ,\ \text{donde } N = \partial F$$

pues F no tiene puntos de ramificación. Para (V, ψ) carta de Y centrada en y existen (U_i, ϕ_i) cartas en X centradas en x_i tales que $F(U_i) \subseteq V$ y con versiones locales:

$$\psi \circ F \circ \phi_i^{-1}(z) = z$$

Dado que X es Hausdorff podemos achicar los U_i si es necesario y suponer que $U_i \cap U_j = \emptyset$ cuando $i \neq j$. Tomar:

$$\tilde{V} = \bigcap_{j=1}^{N} F(U_i)$$

$$\tilde{U}_i = F^{-1}(\tilde{V}) \cap U_i$$

Entonces $\tilde{V}$ es vecindad abierta de y, $F^{-1}(\tilde{V}) = \bigcup_{j=1}^{N} \tilde{U}_j$ unión disjunta de abiertos de X y $F|_{\tilde{U}_i} : \tilde{U}_i \to \tilde{V}$ es biyectiva. Tenemos además el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{U}_i \arrow[r, "F|_{\tilde{U}_i}"] \arrow[d, "\phi_i"'] & \tilde{V} \arrow[d, "\psi"] \\
\phi_i(\tilde{U}_i) \arrow[r, "i"] & \psi(\tilde{V})
\end{tikzcd}$$

donde i denota inclusión. Dado que $\phi_i, F|_{\tilde{U}_i}, \psi$ son biyectivas se debe tener que i es biyectiva. Como ϕ_i, i, ψ son homeomorfismos se concluye que $F|_{\tilde{U}_i}$ es homeomorfismo $\square$

Definición 2 (Espacio localmente arco-conexo) *Un espacio topológico X se dice localmente arco-conexo si para cada $x \in X$ y V vecindad de x existe $U \subseteq V$ vecindad de x que es arco-conexa.*

Hecho 2: Toda superficie de Riemann es localmente arco-conexa.

Hecho 3: Si X es localmente arco-conexo y tenemos $(\tilde{X}_1, p_1), (\tilde{X}_2, p_2)$ cubrimientos de X con $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$ simplemente conexos, entonces existe $f : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ homeomorfismo tal que $p_2 \circ f = p_1$.

Definición 3 (Cubrimiento Universal) *Si X es localmente arco-conexo y $(\tilde{X}, p)$ es cubrimiento de X con $\tilde{X}$ simplemente conexo, diremos que $(\tilde{X}, p)$ es cubrimiento universal de X.*

1.2. Descripción de los morfismos holomorfos $F : \mathbb{C}/L \to \mathbb{C}/M$ con $F(0) = 0$

Sea $F : \mathbb{C}/L \to \mathbb{C}/M$ morfismo holomorfo no constante con $F(0) = 0$. Por fórmula de Riemann-Hurwitz se conluye que F es no ramificada, luego $(\mathbb{C}/L, F)$ es cubrimiento de $\mathbb{C}/M$ (por Lema 1). Dado que $(\mathbb{C}, \pi_L)$ es cubrimiento de $\mathbb{C}/L$ entonces $(\mathbb{C}, F \circ \pi_L)$ es cubrimiento de $\mathbb{C}/M$ (por Hecho 1). Mas aún $(\mathbb{C}, F \circ \pi_L)$ es cubrimiento universal de $\mathbb{C}/M$ (por Hecho 2). Pero $(\mathbb{C}, \pi_M)$ tambien lo es, luego existe $G : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ homeomorfismo tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "\pi_L"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "\pi_M"] \\
\mathbb{C}/L \arrow[r, "F"] & \mathbb{C}/M
\end{tikzcd}$$

es conmutativo (por Hecho 3). Como $F(0) = 0$ se debe tener $G(0) \in M$. Componiendo G con una traslación por $G(0)$ podemos suponer $G(0) = 0$ pues π_M no distingue traslaciones por elementos de M.

Lema 2 *G es holomorfa.*

Demostración del Lema 2: Sea $x \in \mathbb{C}$. Escogemos vecindades abiertas A de x y B de $G(x)$ tales que $\pi_L|_A : A \to \pi_L(A)$ y $\pi_M|_B : B \to \pi_M(B)$ sean homeomorfismos. Dado que G es homeomorfismo podemos achicar A si es necesario de manera que $G(A) \subseteq B$. Luego $F(\pi_L(A)) \subseteq \pi_M(B)$ y para $a \in A$ se tiene:

$$G(a) = \pi_M|_B^{-1} \circ F \circ \pi_L|_A(a)$$

pero $\pi_M|_B^{-1} \circ F \circ \pi_L|_A$ es la versión local de F luego es analítica y por lo tanto G es holomorfa $\square$

Lema 3 *G es $\mathbb{C}$-lineal (no nula).*

Demostración del Lema 3: Si $z \in \mathbb{C}$ y $l \in L$ entonces $G(z+l) = G(z) \pmod{M}$ es decir existe $m(z,l) \in M$ tal que $G(z+l) - G(z) = m(z,l)$. Pero para l fijo la función $m(z,l)$ es analítica y dado que $\mathbb{C}$ es conexo y M discreto $m(z,l)$ debe ser constante. Así $m(z,l)$ es independiente de z. Luego derivando con respecto a z en la igualdad $G(z+l) - G(z) = m(z,l)$ obtenemos:

$$G'(z+l) - G'(z) = 0$$

Luego G' toma todos sus valores en un paralelogramo fundamental del reticulado L. Como dicho paralelogramo es compacto entonces G' debe ser acotada. Pero G' es entera luego debe ser constante. Así $G(z) = \alpha z + \beta$. Como $G(0) = 0$ se concluye que $\beta = 0$ y por lo tanto $G(z) = \alpha z$ (se tendrá $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ pues F es no constante) $\square$

Obervar que $G(L) \subseteq M$ luego se debe tener $\alpha L \subseteq M$. En conclusión tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1 *Si $F : \mathbb{C}/L \to \mathbb{C}/M$ es morfismo holomorfo con $F(0) = 0$ entonces F está inducido por una función $\mathbb{C}$-lineal $G : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de la forma $G(z) = \alpha z$ donde $\alpha \in \mathbb{C}$ cumple $\alpha L \subseteq M$.*

1.3. Descripción general de los morfismos holomorfos $F : \mathbb{C}/L \to \mathbb{C}/M$

Observemos que si $\beta \in \mathbb{C}$ entonces $z \mapsto z + \beta$ desciende a un automorfismo $T_\beta : \mathbb{C}/M \to \mathbb{C}/M$. Luego si $F : \mathbb{C}/L \to \mathbb{C}/M$ es morfismo holomorfo con $F(0) = [\beta]_M$ entonces $T_{-\beta} \circ F : \mathbb{C}/L \to \mathbb{C}/M$ es morfismo holomorfo con $F(0) = 0$. Por Teorema 1 existe $\alpha \in \mathbb{C}$ con $\alpha L \subseteq M$ tal que $T_{-\beta} \circ F([z]_L) = [\alpha z]_M$. Así $F([z]_L) = [\alpha z + \beta]$. En conclusión tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2 *Sea $F : \mathbb{C}/L \to \mathbb{C}/M$ morfismo holomorfo. Existen $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ con $\alpha L \subseteq M$ tales que F está inducido por la función $G : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $G(z) = \alpha z + \beta$. Además puede tomarse $\beta = 0$ si y solo si $F(0) = 0$*

Notar que el recíproco tambien se cumple, es decir si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ con $\alpha L \subseteq M$ entonces $G : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $G(z) = \alpha z + \beta$ desciende a un morfismo holomorfo $F : \mathbb{C}/L \to \mathbb{C}/M$ con $F(0) = [\beta]_M$. Además en el caso en que pueda tomarse $\beta = 0$ (es decir cuando $F(0) = 0$) se tendrá que F es homomorfismo de grupos.

Terminamos esta subsección con:

Teorema 3 *Sea $F : \mathbb{C}/L \to \mathbb{C}/M$ inducida por $G(z) = \alpha z + \beta$ con $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $\alpha L \subseteq M$. Entonces $\partial F = [M : \alpha L]$. En particular F es isomorfismo si y solo si $\alpha L = M$, en cuyo caso F^{-1} esta inducida por $G^{-1}(z) = \alpha^{-1}(z - \beta)$.*

Demostración del Teorema 3: Sabemos que F no ramifica (por fórmula de Riemann-Hurwitz) luego:

$$F^{-1}([\beta]_M) = \{[z_1]_L, \cdots, [z_N]_L\}\ , \quad \text{donde } N = \partial F$$

Como $F([z_i]_L) = [\alpha z_i + \beta]_M = [\beta]_M$ se debe tener $\alpha z_i \in M$. Así:

$$\bigcup_{i=1}^{N} \alpha z_i + \alpha L \subseteq M$$

Y si $m \in M$ entonces $F\left(\left[\frac{m}{\alpha}\right]_L\right) = [m+\beta]_M = [\beta]_M$ luego existe $i \in \{1, ..., N\}$ tal que:

$$\left[\frac{m}{\alpha}\right]_L = [z_i]_L$$

Por lo tanto existe $l \in L$ tal que:

$$\frac{m}{\alpha} = z_i + l$$

Así $m = \alpha z_i + \alpha l \in \alpha z_i + \alpha L$. En conclusión:

$$M \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} \alpha z_i + \alpha L$$

y tenemos entonces la igualdad de los conjuntos. Finalmente observar que si $i \neq j$ entonces:

$$z_i - z_j \notin L \Rightarrow \alpha z_i - \alpha z_j \notin \alpha L$$

Es decir:

$$M = \bigsqcup_{i=1}^{N} \alpha z_i + \alpha L \quad \text{(unión disjunta)}$$

Esto demuestra el resultado. En el caso en que $\alpha L = M$ se tiene $\partial F = 1$ y por lo tanto F es isomorfismo (inversa inducida por $z \mapsto \alpha^{-1}(z-\beta)$) $\square$

Corolario 1 *Los toros complejos $\mathbb{C}/L$ y $\mathbb{C}/M$ son isomorfos si y solo si existe $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $\alpha L = M$.*

2. Clasificación de toros complejos según isomorfía

En esta sección queremos clasificar las superficies de Riemann de género 1 (toros complejos) según isomorfía. Para ello recordamos:

Hecho 4: Todo toro complejo $\mathbb{C}/L$ es isomorfo a un toro del tipo $\mathbb{C}/L_\tau$ donde $L_\tau = \langle 1, \tau \rangle_{\mathbb{Z}}$ y $\tau \in \mathbb{C}$ tiene parte imaginaria positiva.

Así basta clasificar los toros del tipo $\mathbb{C}/L_\tau$. Usaremos el siguiente resultado:

Lema 4 *Sean $L_1 = \langle 1, \tau_1 \rangle_{\mathbb{Z}}$ y $L_2 = \langle 1, \tau_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$ donde $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{C}$ tienen parte imaginaria positiva. Entonces $\gamma L_1 = L_2$ para algún $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ si y solo si existe $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ tal que:*

$$\frac{a\tau_1 + b}{c\tau_1 + d} = \tau_2$$

Demostración del Lema 4: ($\Rightarrow$) Supongamos $\gamma L_1 = L_2$ con $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces:

$$\langle \gamma, \gamma\tau_1 \rangle_{\mathbb{Z}} = \langle 1, \tau_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$$

Luego existen $a, b, c, d, m, n, p, q \in \mathbb{Z}$ tales que:

$$\begin{aligned} \gamma &= a + b\tau_2 \\ \gamma\tau_1 &= c + d\tau_2 \\ 1 &= m\gamma + n\gamma\tau_1 \\ \tau_2 &= p\gamma + q\gamma\tau_1 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \gamma &= am\gamma + an\gamma\tau_1 + bp\gamma + bq\gamma\tau_1 \\ \gamma\tau_1 &= cm\gamma + cn\gamma\tau_1 + dp\gamma + dq\gamma\tau_1 \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} am + bp &= 1 \\ an + bq &= 0 \\ cm + dp &= 0 \\ cn + dq &= 1 \end{aligned}$$

Es decir:

$$\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & p \\ n & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego $\det \begin{pmatrix} q & p \\ n & m \end{pmatrix} = \pm 1$. Además:

$$\frac{q\tau_1 + p}{n\tau_1 + m} = \tau_2$$

Pero:

$$\tau_2 = \frac{(q\tau_1 + p)(n\overline{\tau_1} + m)}{|n\tau_1 + m|^2} = \frac{(qn|\tau_1|^2 + mp) + (qm\tau_1 + pn\overline{\tau_1})}{|n\tau_1 + m|^2}$$

Así:

$$\mathrm{Im}(\tau_2) = \frac{(qm - pn)\mathrm{Im}(\tau_1)}{|n\tau_1 + m|^2}$$

Como $\mathrm{Im}(\tau_2), \mathrm{Im}(\tau_1) > 0$ se concluye que $qm - pn = 1$.

($\Leftarrow$) Supongamos $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ cumple:

$$\frac{a\tau_1 + b}{c\tau_1 + d} = \tau_2$$

Tomar $\gamma = \frac{1}{c\tau_1 + d}$. Entonces:

$$\begin{aligned} a\gamma\tau_1 + b\gamma &= \tau_2 \\ c\gamma\tau_1 + d\gamma &= 1 \\ d\tau_2 - b &= \gamma\tau_1 \\ -c\tau_2 + a &= \gamma \end{aligned}$$

Por lo tanto $\gamma L_1 = L_2$ $\square$

Luego por Corolario 1 y Lema 4 obtenemos:

TEOREMA 4 *Los toros complejos* $\mathbb{C}/L_{\tau_1}$ *y* $\mathbb{C}/L_{\tau_2}$ *(donde* $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{C}$ *tienen parte imaginaria positiva) son isomorfos si y solo si existe* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ *tal que:*

$$\frac{a\tau_1 + b}{c\tau_1 + d} = \tau_2$$

Observer que en dicho caso se puede tomar como isomorfismo $F : \mathbb{C}/L_{\tau_2} \to \mathbb{C}/L_{\tau_1}$ el inducido por $G(z) = (c\tau_1 + d)z$.

3. Espacio de Moduli de superficies de Riemann compactas de género 1

Consideraremos $\mathfrak{M}$ el espacio de Moduli de superficies de Riemann compactas de género 1 como el espacio de clases de isomorfía de toros complejos:

$$\mathfrak{M} = \{[T] : T \text{ toro complejo}\}$$

En la sección anterior vimos que $\mathfrak{M}$ puede describirse completamente usando solo toros de la forma $\mathbb{C}/L_\tau$ donde $\tau \in \mathbb{C}$ tiene parte imaginaria positiva. Mas aún la igualdad en $\mathfrak{M}$ de dos toros de este tipo se relaciona con cierta acción de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ en $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$. En esta sección estudiamos $\mathfrak{M}$ vía esta relación.

3.1. Sobre la acción de $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ en $\mathbb{H}$ y $\mathbb{H}^*$

Repasemos algunos hechos sobre esta acción:

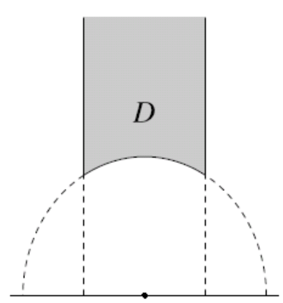
HECHO 5: El grupo $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ actúa en $\mathbb{H}$ vía:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

El núcleo de esta acción es $\{\pm I\}$ donde I es la matriz identidad de Γ. Así $\overline{\Gamma} = \Gamma/\{\pm I\}$ actúa efectivamente en $\mathbb{H}$.

HECHO 6: Si

$$D = \left\{ z \in \mathbb{H} : -\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(z) < \frac{1}{2}, |z| > 1 \right\}$$



Entonces se cumple:

1. Dos puntos distintos de D no son Γ-equivalentes
2. Todo punto de $\mathbb{H}$ es Γ-equivalente a un punto de $\overline{D}$

Se dice por esto que D es región fundamental de Γ (no es universal, en algunos textos se considera $\overline{D}$ como región fundamental de Γ).

Hecho 7: Los puntos distintos de $\overline{D}$ que son Γ-equivalentes son:

1. $z_2 = z_1 + 1 = T \cdot z_1$ donde $\mathrm{Re}(z_1) = -\frac{1}{2}, |z_1| \geq 1$ y $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $z_2 = -\frac{1}{z_1} = S \cdot z_1$ donde $-\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(z_1) \leq \frac{1}{2}, |z_1| = 1$ y $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Además $\Gamma = \langle S, T \rangle$.

Hecho 8: Los puntos $z \in \overline{D}$ con estabilizador no trivial (e.d. $|\Gamma_z| > 2$) son:

1. $z = i$ con $\Gamma_i = \{\pm I, \pm S\}$
2. $z = e^{\pi i/3}$ con $\Gamma_z = \{\pm I, \pm TS, \pm (TS)^2\}$
3. $z = e^{2\pi i/3}$ con $\Gamma_z = \{\pm I, \pm ST, \pm (ST)^2\}$

Estos puntos distinguidos de $\overline{D}$ se llaman puntos elípticos de orden $2, 3$ y 3 respectivamente. Además los puntos de $\mathbb{H}$ con estabilizadores no triviales son justamente aquellos Γ-equivalentes a estos tres. Estos puntos de $\mathbb{H}$ también se llaman puntos elípticos y su orden es el orden del punto elíptico en $\overline{D}$ al cual corresponden (o equivalentemente el orden de un punto elíptico $z \in \mathbb{H}$ es $|\Gamma_z/\{\pm I\}|$). Así hay infinitos puntos elípticos en $\mathbb{H}$ pero solo tres no Γ-equivalentes.

Por el Teorema 4 el espacio de Moduli $\mathfrak{M}$ es identifica con el espacio de órbitas $\Gamma \setminus \mathbb{H}$. Pero cuando se estudia $\Gamma \setminus \mathbb{H}$ se observa que es un espacio topológico (con la topología cociente) no compacto. Sin embargo es posible compactificar $\Gamma \setminus \mathbb{H}$ agregando un punto al infinito. Además se puede hacer de forma que el espacio que resulta sea superficie de Riemann compacta con $\Gamma \setminus \mathbb{H}$ como subsuperficie de Riemann abierta. Para ello consideramos:

$$\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$$

Hecho 9: La acción de Γ en $\mathbb{H}$ se extiende a $\mathbb{H}^*$ vía:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot r = \begin{cases} \frac{ar+b}{cr+d} & \text{si } r \in \mathbb{Q}, cr + d \neq 0 \\ \infty & \text{si } r \in \mathbb{Q}, cr + d = 0 \\ \frac{a}{c} & \text{si } r = \infty, c \neq 0 \\ \infty & \text{si } r = \infty, c = 0 \end{cases}$$

Además Γ actúa transitivamente en $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ con lo que:

$$\begin{aligned} [\infty]_\Gamma &= \mathbb{Q} \cup \{\infty\} \\ \Gamma \setminus \mathbb{H}^* &= \Gamma \setminus \mathbb{H} \cup \{[\infty]_\Gamma\} \end{aligned}$$

Los puntos de $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ se conocen como cúspides de Γ. También es usual decir que "$[\infty]_\Gamma$ es la cúspide de Γ".

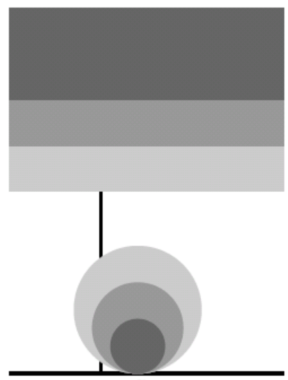
3.2. Sobre la estructura de $\Gamma \setminus \mathbb{H}$ y $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$

En esta subsección extendemos la topología de $\mathbb{H}$ a $\mathbb{H}^*$ y estudiamos los espacio $\Gamma\setminus\mathbb{H}$ y $\Gamma\setminus\mathbb{H}^*$. Primero definimos como vecindades básicas de $\infty \in \mathbb{H}^*$ los conjuntos de la forma:

$$V_l = \{z \in \mathbb{H} : \operatorname{Im}(z) > l\} \cup \{\infty\} \ , \ l > 0$$

Y definimos como vecindades básicas de $a \in \mathbb{Q}$ los conjuntos de la forma:

$$U_t = \{z \in \mathbb{H} : |z - (a + it)| < t\} \cup \{a\} \ , \ t > 0$$



Hecho 10: Estas definiciones dan una topología Hausdorff en $\mathbb{H}^*$ compatible con la topología de $\mathbb{H}$ de manera que la acción de Γ en $\mathbb{H}^*$ es continua y $\overline{D} \cup \{\infty\}$ es compacto.

Hecho 11: El espacio $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$ con la topología cociente es espacio topológico Hausdorff, compacto y conexo donde $\Gamma \setminus \mathbb{H}$ es Hausdorff, abierto y conexo.

Finalmente damos estructura analítica al espacio $\Gamma \setminus \mathbb{H}^*$ de manera que sea superficie de Riemann compacta. Para ello necesitamos:

Hecho 12: Dado $z \in \mathbb{H}$ existe U vecindad abierta de z tal que $\tau U = U$ si $\tau \in \Gamma_z$ y $\tau U \cap U = \emptyset$ si $\tau \notin \Gamma_z$.

Sea ahora $[z_0]_\Gamma \in \Gamma \setminus \mathbb{H}^*$ con $z_0 \in \mathbb{H}^*$

1. Si $z_0 \in \mathbb{H}$ no es elíptico entonces Γ_{z_0} es trivial y escogemos U como en el Hecho 12. En tal caso $\pi|_U : U \to \Gamma \setminus \mathbb{H}^*$ es homeomorfismo sobre su imagen. Tomamos entonces $(\pi(U), \pi|_U^{-1})$ como carta local.

2. Si $z_0 \in \mathbb{H}$ es punto elíptico de orden $m \in \{2, 3\}$ entonces consideramos $\lambda : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ la transformación:

$$\lambda(z) = \frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}$$

   Entonces $\lambda\Gamma_{z_0}\lambda^{-1}$ es grupo cíclico de orden m de transformaciones de $\mathbb{D}$ que fijan el origen. Luego $\lambda\Gamma_{z_0}\lambda^{-1} = \langle\rho\rangle$ donde $\rho : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ esta dada por $\rho(z) = e^{2\pi i/m}z$. Tomamos $U = \lambda^{-1}(B(0, \varepsilon))$ con $0 < \varepsilon < 1$ de manera que $U \subseteq \mathbb{H}$ y $\tau U \cap U = \emptyset$ si $\tau \notin \Gamma_{z_0}$ (usar Hecho 12). Luego como $B(0, \varepsilon)$ es estable bajo $\lambda\Gamma_{z_0}\lambda^{-1}$ entonces U es estable bajo Γ_{z_0}. Ahora como $f : B(0, \varepsilon) \to B(0, \varepsilon^m)$ definida por

$f(z)=z^m$ respeta la acción de $\lambda\Gamma_{z_0}\lambda^{-1}$ entonces desciende a una función $F:\lambda\Gamma_{z_0}\setminus B(0,\varepsilon)\lambda^{-1}\to B(0,\varepsilon^m)$ que es un homeomorfismo. Así tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[d] & B(0,\varepsilon) \arrow[d] \arrow[dr, "f"] & \\
\pi(U) \arrow[r] & \Gamma_{z_0}\setminus U \arrow[r] & \lambda\Gamma_{z_0}\lambda^{-1}\setminus B(0,\varepsilon) \arrow[r, "F"'] & B(0,\varepsilon^m)
\end{tikzcd}$$

donde las flechas horizontales son homeomorfismos. Luego existe homeomorfismo $\phi:\pi(U)\to B(0,\varepsilon^m)$ tal que $\phi\circ\pi(z)=\lambda(z)^m$. Tomamos entonces $(\pi(U),\phi)$ como carta local (centrada en $[z_0]_\Gamma$).

3. Si $z_0=\infty$ entonces tomamos $U=\{z\in\mathbb{H}:\mathrm{Im}(z)>2\}$. Se observa que $\tau U\cap U=\emptyset$ si y solo si $\tau=\pm\begin{pmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ (e.d. si y solo si $\tau\in\Gamma_\infty$) pues si $\tau=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ con $c\neq 0$ y $\tau z\in U\cap\tau U$ entonces:

$$\mathrm{Im}(\tau z)=\frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}\leq\frac{1}{|c|^2\mathrm{Im}(z)}\leq\frac{1}{2|c^2|}$$

lo que es imposible. Ahora definimos $U^*=U\cup\{\infty\}$ y tomamos $\psi:U^*\to B(0,e^{-4\pi})$ dada por:

$$\psi(z)=\begin{cases} e^{2\pi iz} & \text{si } z\in U\\ 0 & \text{si } z=\infty\end{cases}$$

Entonces ψ es continua y respeta la acción de Γ_∞ luego desciende a una función $\Psi:\Gamma_\infty\setminus U^*$ que es un homeomorfismo. Así tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & U^* \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[d] \arrow[dr, "\psi"] & \\
\pi(U^*) \arrow[r] & \Gamma_{z_0}\setminus U^* \arrow[r, "\Psi"'] & B(0,e^{-4\pi})
\end{tikzcd}$$

donde las flechas horizontales son homeomorfismos. Luego existe homeomorfismo $\vartheta:\pi(U^*)\to B(0,e^{-4\pi})$ tal que $\vartheta\circ\pi(z)=\begin{cases} e^{2\pi iz} & \text{si } z\in U\\ 0 & \text{si } z=\infty\end{cases}$. Tomamos entonces $(\pi(U),\vartheta)$ como carta local.

Teorema 5 *El atlas anteriormente definido es un atlas complejo que dota a $\Gamma\setminus\mathbb{H}^*$ de estructura de superficie de Riemann compacta de género cero. Además $\Gamma\setminus\mathbb{H}$ es subsuperficie de Riemann abierta de $\Gamma\setminus\mathbb{H}^*$.*

En conclusión podemos considerar el espacio de moduli $\mathfrak{M}$ como superficie de Riemann no compacta que se puede compactificar por un punto a una superficie de Riemann compacta de genero cero.

Referencias

[1] Recuerdo sobre cubrimientos: Topology, James R. Munkres.
[2] Descipción de morfismos holomorfos entre toros complejos y clasificación de toros complejos según isomorfía: Algebraic Curves and Riemann Surfaces, Rick Miranda.
[3] Espacio de Moduli de superficies de Riemann compactas de genero 1: Eliptic Curves, J. S. Milne.